Correction TD8
Statistiques Inférentielles

Exercice 1

L'hypothèse alternative est H_1, $\sigma_1 > \sigma_2$.

Exercice 2

Question 1

On souhaite effectuer un test d'homogénéité.

Si $X \sim G(p)$ alors $1[X = 1] \sim B(p)$. Notons $X \sim B(p_1)$ et $Y \sim B(p_2)$ et respectivement $X_i, i = 1...n_1$ un échantillon de X et $Y_i, i = 1...n_2$ un échantillon de Y. La taille de l'échantillon de fumeuses est supérieur à 30 et de même pour celui des non fumeuses. Ainsi $\overline{X}_{n_1} \sim N(p_1, p_1q_1/n_1)$ et $\overline{Y}_{n_2} \sim N(p_2, p_2q_2/n_2)$. Sous H_0 $p_1 = p_2$ et donc $p_1q_1 = p_2q_2$. 0n choisit donc,

$$T = \frac{\frac{\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2}}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}}{\sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}}$$

avec $S_1^2 = \frac{1}{n_1-1} \sum_{i=1...n_1} (X_i - \overline{X}_{n_1})^2 = \frac{n_1}{n_1-1} \overline{X}_{n_1}(1 - \overline{X}_{n_1})$ et $S_2^2 = \frac{1}{n_2-1} \sum_{i=1...n_2} (X_i - \overline{X}_{n_2})^2 = \frac{n_2}{n_2-1} \overline{X}_{n_2}(1 - \overline{X}_{n_2})$.

Question 2

L'hypothèse alternative est $p_1 < p_2$.

Exercice 3

Question 1

Sous H_0, T_1 prend des valeurs dans $[0, 5]$, sous H_1 dans $[0, \theta]$. On sait que la densité de T_1 est $f_{T_1}(x) = 1[x \in [0, 5]] n \frac{x^{n-1}}{5^n}$, pour $x \in \mathbb{R}$. On remarque par ailleurs que sous H_0, $T_1 \xrightarrow[n\to\infty]{P} 5$.

Ainsi on remarque que les valeurs autour de 5 sont favorables à H_0 ; posons par exemple $R = [0, c[\cup]5, \infty[$ où c est le quantile d'ordre 0.05 de la loi de T_1. Les valeurs de R sont défavorables à H_0 donc en faveur de H_1 et celle dans $[c, 5]$ en faveur de H_0.

Question 2

Sous H_0, $E[X] = 5/2$, et $V(X) = 25/12$

$$P_{H_0}(|\overline{X}_n - 5/2| > c_1) \leq \frac{V(X)}{nc^2}$$

Posons $c_1 = \sqrt{25/(12 \times 0.05n)}$ alors $\frac{V(X)}{nc^2} = 0.05$ et donc,

$$P_{H_0}(|\overline{X}_n - 5/2| > c_1) \leq 0.05$$

or $|\overline{X}_n - 10| > c_1 \iff T_2 > 2c_1$ donc $T_2 \leq 2c_1$ est en faveur de H_0 et $T_2 > 2c_2$ est en faveur de H_1.

Exercice 4

Notons la p-valeur p et on rappelle que pour une loi réelle continue $P(T > t) = P(T \geq T)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

<u>1</u> $p = P(T \geq 2.34) \geq 0.05$ on ne rejette pas H_0.

<u>2</u> $p = 1 - P(T \leq 2.34) = 0.77 \geq 0.05$ on ne rejette pas H_0.

<u>3</u> $p = P(T \geq 0.03) \geq 0.05$ on ne rejette pas H_0.

<u>4</u> $p = 1 - P(T \leq 1.07) = 0.019 \leq 0.05$ on rejette H_0.

<u>5</u> $p = P(T > 1.07) \geq 1 - P(T \leq 1.07) = 0.99$ on ne rejette pas H_0.

<u>6</u> $p = P(T > 2.34) \leq 1 - P(T \leq 1.07) \leq 0.05$ on rejette H_0.

<u>7</u> $p = P(T > 2.34) \leq 1 - P(T \leq 1.07) = 0.200$, on ne peut pas conclure sans plus d'information.

Exercice 5

<u>Question 1</u> $H_1 : \mu > 1472$.

<u>Question 2</u> $T \leq 1718$ est en faveur de H_0 et $T > 1718$ en défaveur de H_0.

<u>Question 3</u>

Sous H_0 $\mu = 1472$; $P(T > 1718) = P(\frac{T-\mu}{\mu^{1/2}} > \frac{1718-\mu}{\mu^{1/2}})$. Or on suppose que la loi de T est approchée par une loi $N(\mu, \mu)$ et la loi de $\frac{T-\mu}{\mu^{1/2}}$ est approchée par $N(0, 1)$. Soit $X \sim N(0, 1)$, $P(T > 1718) \simeq P(X > 246/38.4) \simeq P(X > 6.4) \leq 0.05$; on peut donc rejeter H_0.

Exercice 6

$P(|T| \geq 2) = 2P(T \geq 2) \simeq 0.0455$ est l'erreur de type I.