CORRECTION TD9
STATISTIQUES INFÉRENTIELLES

Exercice 2

Le jugement de l'examinateur est une variable de Bernoulli de paramètre p. H_0 est $p = 1/2$, H_1 est $p \neq 1/2$.

Soit N_1, le nombre d'innocentés ; sous H_0 $(N_1 - 140)/\sqrt{280/4}$ suit asymptotiquement une loi normale $N(0,1)$.

$$P_{H_0}(|N_1 - 140|/8.36 > 1.96) \simeq 0.05$$

Le risque de première espèce dans ce cas serait 0.05.

Par ailleurs, sous H_1, $(N_1 - 280p)/(\sqrt{280pq})$ suit asymptotiquement une $N(0,1)$. Donc, le risque de deuxième espèce serait

$$\begin{aligned} &P_{H_1}(|N_1 - 140|/8.36 \leq 1.96) = P(123.62 < N_1 < 156.38) \\ &= P(\frac{123.62 - 280p}{/}\sqrt{280pq} < N_1 - 280p < (156.38 - 280p)/\sqrt{280pq}) \end{aligned}$$

On remarque qu'on aurait aussi pu faire un test d'adéquation du χ^2.

Exercice 3

Soit $T \sim N(\mu, 1)$; si $\mu = 1$, l'erreur de deuxième espèce est donnée par $P_{\mu=1}(|T| < 2)$,

$$P_{\mu=1}(|T| < 2) = P(-2 < T < 2) = P(-3 < T - 1 < 1) = P(T - 1 < 1) - P(T - 1 \leq -3)$$

$T - 1 \sim N(0,1)$, donc,

$$P(T - 1 \leq -3) = P(T - 1 \geq 3) = 1 - P(T - 1 < 3)$$

donc, $P_{\mu=1}(|T| < 2) = P(T - 1 < 1) + P(T - 1 < 3) - 1$. On trouve $P_{\mu=1}(|T| < 2) \simeq 0.83$.

Exercice 4

Question 1

Sous H_0, $X \sim U([0,2])$,

$$P(|X - 1| \geq 0.9) = P(X \geq 1.9) + P(X \leq 0.1) = 1 - P(X < 1.9) + P(X \leq 0.1)$$

La loi de X continue donc $P(X < 1.9) = P(X \leq 1.9)$. Par ailleurs pour $t \in [0,2]$, $P(X \leq t) = t/2$, donc le risque première espèce,

$$P(|X - 1| \geq 0.9) = 1 - 0.95 + 0.05 = 0.1$$

Question 2

Si $\theta = 2.5$, $t \in [0,2]$, $P(X \leq t) = t/2.5$, donc le risque de deuxième espèce est,

$$P(|X - 1| \leq 0.9) = P(X < 1.9) - P(X \leq 0.1) = 1.8/2.5 \simeq 0.72$$

Exercice 5

On suppose que $p = 1/8$, en utilisant une approximation par la loi normale on trouve que $\frac{T-144p}{\sqrt{144pq}}$ suit approximativement $N(0,1)$. Soit c le quantile d'ordre 0.99, $c = 2.326$, alors,

$$P(\frac{T - 144 * 0.125}{\sqrt{144 * 0.11}} > 2.326) = 0.01$$

$$P(T > 27.26) \simeq 0.01$$

Le zone de rejet au niveau $\alpha = 0.01$ est $T > 27.26$; or $29 > 27.26$ donc on rejette H_0.

Exercice 6

Question 1

a) L'erreur de première espèce correspond à l'erreur que l'on commet quand on rejette H_0 à tort.

L'erreur de deuxième espèce correspond à l'erreur que l'on commet quand on ne rejette pas H_0 à tort, c'est à dire qu'on ne rejette pas H_0 alors que c'est bien H_1 qui est à l'origine de l'échantillon.

b) $P(\frac{\sqrt{100}(|\overline{X}_{100}-80|}{\sqrt{49}} \leq c) = 0.95$ pour c le quantile d'ordre 0.975 de $N(0,1)$, c'est à dire $c = 1.96$. Donc $P(|\overline{X}_{100} - 80| > 1.372) \simeq 0.05$.

Si $|\overline{X}_{100} - 80| > 1.372$ on rejette H_0, donc on choisit H_1, sinon on ne rejette pas H_0, donc on choisit H_0.

Si $\overline{x}_{100} = 79.1, \quad |80 - \overline{x}_{100}| = 0.9 \leq 1.372$ donc on choisit H_0.

c) L'erreur de deuxième espèces est la probabilité, sous H_1, $P_{\mu=78}(|\overline{X}_{100} - 80| \leq 1.372)$.

D'après ce qui précède, $\{|\overline{X}_{100} - 80| \leq 1.372\} = \{|\frac{\sqrt{100}(\overline{X}_{100}-80)}{\sqrt{49}}| \leq 1.96\}$. Par ailleurs, sous H_1, $\frac{\sqrt{100}(\overline{X}_{100}-78)}{\sqrt{49}} \sim N(0,1)$; soit $Y \sim N(0,1)$.

On a que,

$$P_{\mu=78}(|\frac{10(\overline{X}_{100} - 80)}{7}| \leq 1.96) = P(|\frac{10(\overline{X}_{100} - 78)}{7} - \frac{10 * 2}{7}| \leq 1.96)$$

$$P(|Y - \frac{20}{7}| \leq 1.96) = P(-1.96 + \frac{20}{7} \leq Y \leq 1.96 + \frac{20}{7})$$

$$P_{\mu=78}(|\frac{10(\overline{X}_{100} - 80)}{7}| \leq 1.96) = P(Y \leq 1.96 + \frac{20}{7}) - P(Y < -1.96 + \frac{20}{7})$$

$$P_{\mu=78}(|\frac{10(\overline{X}_{100} - 80)}{7}| \leq 1.96) \simeq P(Y \leq 4.81) - P(Y < 0.89)$$

Donc $P_{\mu=78}(|\overline{X}_{100} - 80| \leq 1.372) \simeq 0.18$.

Question 2

Sous H_0, $P(|\overline{X}_{100} - 78| > 1.372) \simeq 0.05$. Donc si $|\overline{X}_{100} - 78| > 1.372$ on choisit H_1 et sinon H_0. Si $\overline{x}_{100} = 79.1, \quad |78 - \overline{x}_{100}| = 1.1 \leq 1.372$ donc on choisit H_0.

Sous H_1,

$$P_{\mu=80}(|\overline{X}_{100} - 78| > 1.372) = P(|\frac{\sqrt{100}(\overline{X}_{100} - 80)}{\sqrt{49}} + 2 * 10/7| > 1.96)$$

$$P_{\mu=80}(|\overline{X}_{100} - 78| > 1.372) \simeq P(Y > -0.9) + P(Y < -4.82) \simeq P(Y < 0.9) \simeq 0,816$$

Donc le risque de deuxième espèce est $P(|\overline{X}_{100} - 78| \leq 1.372) \simeq 1 - 0.81 \simeq 0.184$.

c) Les décisions sont contradictoires