Feuille n° 4
Statistiques Inférentielles

Exercice 1

1. On place n boules aléatoirement (indépendamment et uniformément) sur l'intervalle $[0,1]$. Quelle est la probabilité d'avoir k boules dans l'intervalle $[0,0.1]$?
2. Même question pour $10n$ boules dans l'intervalle $[0,0.01$?
3. **Loi des événements rares** (forme faible). Soient n et p tels que le produit $np = \lambda > 0$ est fixé. Montrer que pour $n \to +\infty$ et $p \to 0$ on a :

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{(n-k)} \to e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

4. Soit $X \sim \text{Poiss}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Calculer $\mathbb{E}[X]$. En déduire un estimateur de λ.
5. Soient $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $\sim \text{Poiss}(\lambda)$. Montrer que la vraisemblance est donnée par :

$$L(\lambda; x_1, \ldots, x_n) = \frac{e^{-n\lambda}}{x_1! \ldots x_n!} \lambda^{x_1 + \cdots + x_n}$$

6. Calculer la log-vraisemblance et en déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) de λ.
7. Quel est l'EMV de la probabilité que $X_1 = \cdots = X_n = 0$.

Exercice 2

Le 28 Janvier 1986 le réservoir de la navette Challenger explose juste après le décollage. Supposons que la probabilité d'explosion du réservoir à la température t est donnée par :

$$p(t) = \frac{e^{a+bt}}{1 + e^{a+bt}}.$$

Montrer que l'application $x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$ est inversible et déterminer son inverse. Déterminer la vraisemblance $L(a,b)$ ainsi que la log-vraisemblance $l(a,b)$.

Exercice 3

Supposons que $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ sont des v.a. indépendantes. Alors $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ suit une loi de Rayleigh(σ) de densité :

$$f_\sigma(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad \forall x \geq 0.$$

Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de σ ?

Exercice 4

Soient $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $\sim \mathcal{U}([-\alpha, \alpha])$. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de α ?