FEUILLE N° 1
STATISTIQUES INFÉRENTIELLES

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire de densité f sur $\mathbb{R}$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de X.

1. Chercher la densité de $Z = \max_{i=1,\ldots,n} X_i$. On commence par chercher la fonction de répartition de Z en fonction de celle de X puis on dérive.
2. Chercher la densité de $Y = \min_{i=1,\ldots,n} X_i$.

Exercice 2

Soit X une variable de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Donner la loi de densité de X et sa fonction de répartition.
2. Calculer $\mathbb{E}X$ et $\mathrm{Var}(X)$.
3. Soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables i.i.d de même loi que X. Trouver la loi de $Y = \min_{i=1,\ldots,n} X_i$.

Exercice 3

Soit X une variable gaussienne centrée réduite.

1. Donner la loi de densité de X et sa fonction de répartition.
2. Calculer $\mathbb{E}X$ et $\mathrm{Var}(X)$.
3. Soit $Y = \mu + \sigma X$ où μ, σ sont deux réels et $\sigma \neq 0$. Donner la loi de Y.
4. Soit $Z = \exp X$. Donner la densité de la loi de Z ainsi que $\mathbb{E}Z$ et $\mathrm{Var}(Z)$.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire centrée réduite. Déterminer l'entier k tel que $\mathbb{P}\{|X| \geqslant k\} \leqslant 0.01$?

Exercice 5

Un comptable voudrait simplifier sa comptabilité en arrondissant les montants à l'entier le plus proche. Par exemple, arrondir 99.53€ et 100.46€ à 100€. On se demande quel est l'effet cumulé sur, par exemple 100 montants ? Pour cela, on modélise les erreurs d'arrondis par 100 variables aléatoires $X_1, \ldots, X_{100}$ indépendantes distribuées selon la loi uniforme $\mathcal{U}[-1/2, 1/2]$.

1. Calculer l'espérance et la variance de X_1.
2. A l'aide de l'inégalité de Chebyshev, majorer la probabilité que l'erreur cumulée $|X_1 + \ldots + X_{100}|$ dépasse 10€.

Exercice 6

Lors d'une élection en Floride, une proportion p vote pour le candidat G et une proportion $1 - p$ pour le candidat B. On demande à un certain nombre de votants pour qui ils ont voté. Soit X_i l'indicatrice de l'événement "la i^e^ personne interrogée a voté pour le candidat G."

On suppose que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre p et que l'on utilise $\overline{X}_n$ pour prédire p.

1. A l'aide de l'inégalité de Chebyshev, déterminer le nombre minimal n de personnes interrogées pour que la probabilité que $\overline{X}_n$ ne s'écarte de p d'au plus 0.2 soit supérieure à 0.9.
   Indication : Commencer par supposer que $p = 1/2$, puis utiliser que $p(1-p) \leqslant 1/4$ pour tout $0 \leqslant p \leqslant 1$.
2. Même question avec la probabilité que $\overline{X}_n$ ne s'écarte de p d'au plus 0.1.
3. Reprendre les deux premières questions avec une probabilité supérieure à 0.95.
4. Si $p > 1/2$, le candidat G gagne, si $\overline{X}_n > 1/2$ on prédit que G gagne. Déterminer n (le plus petit possible) pour que la probabilité que l'on prédise le bon gagnant soit au moins 0.9, si en réalité $p = 0.6$.

Exercice 7

Soit $X_1, \ldots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes distribuées selon une fonction de répartition F. On définit alors F_n pour tout a, par

$$F_n(a) = \frac{\text{nombre de } X_i \text{ dans }]\infty, a]}{n} .$$

1. Soit a fixé. Proposer une autre définition de $F_n(a)$ à l'aide d'indicatrices.
2. En déduire son espérance et sa variance.
3. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{|F_n(a) - F(a)| > \varepsilon\right\} = 0 .$$

Exercice 8

Soit X une variable de loi de densité $f(x) = ce^{-\lambda|x-a|}$, où $c > 0$, $\lambda > 0$, $a \in \mathbb{R}$.

1. Calculer la valeur de c en fonction de λ et a.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
   Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables indépendantes et de même loi que X.
3. Montrer que la loi des grands nombres peut s'appliquer à la suite (X_k), et énoncer cette loi.

Exercice 9

Soit M_n le maximum de n variables aléatoires de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Donner l'expression de $\mathbb{P}\{|M_n - 1| > \varepsilon\}$.
2. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{|M_n - 1| > \varepsilon\} = 0$.

Exercice 10

Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[-1, 1]$ et $T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

1. Montrer qu'il existe un réel a tel que :
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{|T_n - a| > \varepsilon\} = 0 .$$
2. Calculer a.

Exercice 11

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_{144}$ des variables aléatoires i.i.d. de moyenne 2 et de variance 4. Approcher $\mathbb{P}\left\{X_1 + X_2 + \ldots + X_{144} > 144\right\}$ à l'aide du théorème central limite.

Exercice 12

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_{625}$ des variables aléatoires i.i.d. dont la densité f est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 3(1-x)^2 & \text{for } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

Approcher $\mathbb{P}\{X_1 + X_2 + \ldots + X_{625} < 170\}$.

Exercice 13

Reprendre l'exercice 6 avec le théorème central limite.

Exercice 14

Soit X une variable binomiale de paramètres n et p.

1. Montrer que la loi de la variable aléatoire
$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$
peut être approchée par une loi normale standard.
2. Un calcul exact donne $\mathbb{P}\{X \leqslant 25\} = 0.55347$ pour $n = 100$ et $p = 1/4$. A l'aide du théorème central limite, donner une approximation de $\mathbb{P}\{X \leqslant 25\}$.
3. Lorsque $n = 100$ et $p = 1/4$, alors $\mathbb{P}\{X \leqslant 2\} = 1.87 \cdot 10^{-10}$, donner une approximation de cette probabilité.

Exercice 15

Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites et soit

$$Y_n = X_1^2 + \ldots + X_n^2$$

1. Montrer que $\mathbb{E}[X_1^2] = 1$ et $\mathbb{E}[X_1^4] = 3$. En déduire que $\mathrm{Var}(X_1^2) = 2$.
2. Approcher $\mathbb{P}\{Y_{100} > 110\}$.