Feuille n° 1bis
Statistiques et simulations probabilistes

Exercice 1

Soit U une variable uniforme sur l'intervalle $[0,1]$, Donner la loi de X lorsque X est donnée par les formules suivantes

1. $X = -\log U$
2. $X = 5U$
3. $X = \mathbf{1}_[0,3/4](U)$

Exercice 2

Soit X une variable uniforme sur $[0,1]$, on considère les applications mesurables $h : [0,1] \to$ et $g : [0,1] \to$ définies par

$$h(x) = x\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{3}[}(x) + \frac{1}{3}\mathbf{1}_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}[}(x) + (1-x)\mathbf{1}_{[\frac{2}{3},1]}(x)$$

et

$$g(x) = \frac{2}{3}x\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}[}(x) + \frac{2}{3}(1-x)\mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1]}(x).$$

On définit les variables aloires $Y = g(X)$ et $Z = h(X)$.

1. Donner le graphe des fonctions g et h.
2. Donner la probabilité $\mathbb{P}(Y = 1/3)$
3. Donner la probabilité $\mathbb{P}(Y \leq \frac{1}{6})$
4. Donner la fonction de répartition de Y
5. Donner la fonction de répartition de Z
6. Donner la fonction de répartition de $Y - Z$.

Exercice 3

Méthode de Box-Muller

Soit U_1 et U_2 deux variables aloires indépendantes et uniformes sur l'intervalle $[0,1]$. On définit le vecteur (X,Y) par $X = \sqrt{-2\log U_1}\cos(2\pi U_2)$ et $Y = \sqrt{-2\log(U_1)}\sin(2\pi U_2)$. Utiliser la formule de changement de variables pour calculer la densité du vecteur (X,Y).