Feuille n° 3
Statistiques Inférentielles

Exercice 1

Soit (X_n) une suite de variables aléatories i.i.d. de Bernoulli de paramètre p inconnu.

1. Montrer que $\overline{X}_n$ est un estimateur consistant de p.
2. A partir de $\overline{X}_n$, proposer un estimateur consistant de $p(1-p)$.

Exercice 2

Soit (X_n) une suite de variables i.i.d. de gaussiennes de paramètres $(0, \theta^2)$ où $\theta > 0$ est inconnu. On considère la variable

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 .$$

Est-elle un estimateur consistant de θ^2 ?

Exercice 3

Soit deux estimateurs S et T d'un paramètre θ tels que $\mathrm{Var}[S] = 40$ et $\mathrm{Var}[T] = 4$.

1. On suppose que $\mathbb{E}[S] = \theta$ et $\mathbb{E}[T] = \theta + 3$. Quel estimateur choisiriez-vous ?
2. On suppose que $\mathbb{E}[S] = \theta$ et $\mathbb{E}[T] = \theta + a$, $a > 0$. Discutez en fonction de a l'estimateur que vous choisiriez.

Exercice 4

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon de loi $\mathcal{E}xp(\lambda)$. On souhaite estimer $1/\lambda$.

1. Proposer un estimateur sans biais de $1/\lambda$.
2. Soit $M_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Rappeler la loi de M_n.
3. A l'aide de l'Exercice 4 de la Feuille n° 2, proposer un autre estimateur sans biais de $1/\lambda$.
4. Lequel de ces deux estimateurs choisiriez-vous ?

Exercice 5

On reprend l'Exercice 6 de la Feuille n° 2. Lequel des deux estimateurs proposés choisiriez-vous ?

Exercice 6

Soit $\overline{X}_n$ et $\overline{Y}_m$ les moyennes empiriques de deux échantillons indépendants de tailles respectives n et m de même loi de moyenne μ et de même variance σ^2. On propose un nouvel estimateur

$$T = r\overline{X}_n + (1-r)\overline{Y}_m$$

où r est un réel compris entre 0 et 1.

1. Montrer que T est un estimateur sans biais de μ.
2. Montrer que la variance de T est minimale pour $r = n/(n+m)$.

Exercice 7

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon de loi de Bernoulli de paramètre p. On considère les estimateurs suivants :

$$T_1 = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n) \quad \text{et} \quad T_2 = \min(X_1, \ldots, X_n)\,.$$

1. T_1 et T_2 sont-ils des estimateurs sans biais de p ?
2. Montrer que
$$\mathrm{MSE}(T_1) = \frac{p(1-p)}{n} \quad \text{et} \quad \mathrm{MSE}(T_2) = p^n - 2p^{n+1} + p^2\,.$$
3. Lequel des deux estimateurs est le plus efficace pour $n = 2$?

Exercice 8

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de loi $\mathcal{E}xp(\lambda)$. On sait que $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais de $1/\lambda$. Considérons des estimateurs plus généraux de la forme

$$T = c(X_1 + \ldots + X_n)\,,$$

où c est un réel.

1. Calculer le risque quadratique moyen de T en fonction de c.
2. Pour quelle valeur de c ce risque est-il minimum ? Comparez ce risque minimum avec le risque obtenu pour $c = 1/n$.