Feuille n° 6
Statistiques Inférentielles

Exercice 1

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ où (μ, σ^2) sont des paramètres inconnus.

1. A l'aide de la fonction caractéristique, montrer que la loi de $\overline{X}_n$ est $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.
2. On considère une réalisation de cet échantillon de taille $n = 34$ de moyenne empirique 3.54 et d'écart-type empirique 0.13. Construire un intervalle de confiance à 95% pour μ.

Exercice 2

On a commandé 10 sacs de ciment, qui sont supposés peser 94 kg chacun. Le poids moyen des 10 sacs vaut 93.5 kg. En supposant que les poids des 10 sacs peuvent être considérés comme une réalisation d'un échantillon d'une loi normale de paramètres inconnus, construire un intervalle de confiance à 95% pour l'espérance. L'écart-type empirique vaut 0.75.

Exercice 3

Soit un jeu de données $x_1, \ldots, x_n$, réalisation d'un échantillon $X_1, \ldots, X_n$ de loi $\mathcal{N}(\mu, 1)$. On suppose qu'il existe des variables aléatoires $L_n = g(X_1, \ldots, X_n)$ et $U_n = h(X_1, \ldots, X_n)$ telles que

$$\mathbb{P}\left\{L_n < \mu < U_n\right\} = 0.95$$

pour tout μ. On suppose que l'intervalle de confiance à 95% obtenus à partir des données est $(\ell_n, u_n) =]-2, 5[$.

1. On pose $\theta = 3\mu + 7$. Soit $\widetilde{L}_n = 3L_n + 7$ et $\widetilde{U}_n = 3U_n + 7$. Montrer que
$$\mathbb{P}\left\{\widetilde{L}_n < \theta < \widetilde{U}_n\right\} = 0.95\,.$$
2. Ecrire un intervalle de confiance pour θ en fonction de ℓ_n et u_n.
3. On pose maintenant $\theta = 1 - \mu$, de même trouver $\widetilde{L}_n$ et $\widetilde{U}_n$, et un intervalle de confiance pour θ.

Exercice 4

On se suppose que l'intervalle $]2, 3[$ est un intervalle de confiance à 95% pour le paramètre μ d'une loi de Poisson. Soit X une variable aléatoire de loi $\text{Pois}(\mu)$. Construire un intervalle de confiance à 95% pour $\mathbb{P}\{X = 0\} = e^{-\mu}$.

Exercice 5

Un hôpital souhaite estimer le coût d'un patient pour la totalité de son séjour, sachant que le coût par jour est de 200 euros. Pour un échantillon de 500 patients, on a observé une durée de séjour de 5.4 jours avec un écart-type de 3.1 jours. Donner un intervalle de confiance à 90% pour la durée de séjour d'un patient et en déduire un intervalle pour le coût du patient. On suppose que les données sont gaussiennes.

Exercice 6

Le chiffre d'affaires moyen d'un commerçant, calculé sur les trente derniers jours, est de 2000 euros avec un écart-type de valeur $s_{30} = 300$ euro. Si on admet que son chiffre d'affaires quotidien peut être représenté par une variable aléatoire X de loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 inconnus, donner un intervalle de confiance de niveau 095% pour μ. Obtient-t-on le même intervalle si σ est connu et de valeur $\sigma = 300$?

Exercice 7

Un sondage effectué auprès de 1000 personnes, réparties en cinq groupes de 200 personnes, a donné comme valeur moyenne de dépenses mensuelles consacrées aux loisirs 301 euros. N'ayant relevé que la dispersion empirique des moyennes empiriques de chacun des cinq groupes, soit l'écart type empirique $s_5 = 15.51$, construire un intervalle de confiance à 95% pour ces dépenses de loisirs. Comment expliquer l'amplitude de l'intervalle alors que l'enquête porte sur 1000 personnes ?