GROUPE DE TRAVAIL À LA LLAGONNE 2008
PROPOSITION DE SUJET (VERSION DU 22/9/07) :
VARIÉTÉS DE REPRÉSENTATIONS SL(2) ET TQFT

PAR GREGOR MASBAUM AVEC L'AIDE DE JULIEN MARCHÉ

Nous proposons d'étudier ensemble la géométrie des espaces de représentations $SL(2)$ d'un groupe fondamental d'une surface et sa quantification par la théorie *skein* et la TQFT. L'idée serait d'étudier le "background" nécessaire pour comprendre l'article de Julien Marché et Majid Narimannejad intitulé *Some Asymptotics of TQFT via skein theory* [MN]. Cet article relie TQFT et géométrie des espaces de représentations et donne notamment une nouvelle preuve géométrique de la fidélité asymptotique des représentations quantiques des mapping class groupes (théorème de J. E. Andersen et de Freedman, Walker, Wang).

(Aujourd'hui le 22/9/07 la version sur l'arXiv de [MN] n'est pas à jour. Il vaut mieux prendre la version sur la page personnelle de Julien.)

Ce qui suit n'est pas une liste d'exposés, mais un découpage possible du matériel par thèmes. Nous espérons trouver des personnes intéressées qui se proposeront pour faire des exposés sur tout ou partie d'un de ces thèmes. Bien sûr, il faudra aussi quelques exposés sur l'article [MN] lui-même.

Thème 1. *L'anneau des caractères* $SL(2,\mathbb{C})$ *de* $\pi_1(\Sigma)$ *(où* Σ *est une surface) vu comme anneau des fonctions sur l'espace des représentations* $\mathcal{M}(\Sigma, SL(2,\mathbb{C}))$.

Un exposé élementaire (pour un étudiant débutant) serait de montrer que le *skein* module de Kauffman de $\Sigma \times I$ admet pour base les classes d'isotopie des courbes sur Σ.

Ensuite, il faudrait faire le lien avec l'anneau des caractères $SL(2,\mathbb{C})$. Il faudrait expliquer que cet anneau est engendré par les fonction traces associées aux courbes sur Σ et est, en fait, *isomorphe* au *skein* module de Kauffman de $\Sigma\times I$ en $A=-1$.

On peut partir des énoncés dans la section 7 de Przytycki et Sikora [PS]. On peut consulter aussi [M, section 3]. J'ignore où exactement se trouvent les preuves. Le résultat fondamental semble être dans Bullock [Bu] et fait intervenir les identités de traces. D'après la fiche Mathreview de cet article, il y est montré que le quotient du *skein* module en $A=-1$ par son nil-radical est isomorphe à l'anneau des caractères $SL(2,\mathbb{C})$.

Thème 2. *Structure symplectique sur* $\mathcal{M}(\Sigma, SL(2,\mathbb{C}))$ *et comment voir le skein module de* Kauffman *de* $\Sigma \times I$ *comme quantification de* $\mathcal{M}(\Sigma, SL(2,\mathbb{C}))$.

Un bon point de départ est de lire les trois premières sections de Bullock, Frohman, Kania-Bartoszyńska [BFK] (jusqu'au théorème 1, page 9.) Il y est notamment expliqué comment le crochet de Kauffman mène à un crochet de Poisson sur $\mathcal{M}(\Sigma, SL(2,\mathbb{C}))$ (formule (3.7) dans [BFK]).

Ensuite, il faudrait chercher dans les papiers originaux de Goldman [G1] et peut-être Biswas et Guruprasad [BG] pour voir comment ce crochet de Poisson provient de la structure symplectique naturelle sur $\mathcal{M}(\Sigma, SL(2,\mathbb{C}))$ (voir la *product formula* page 265 de [G1]).

Thème 3. *L'espace des $SU(2)$-représentations $\mathcal{M}(\Sigma, SU(2))$ et les flots hamiltoniens des fonctions traces.*

L'espace $\mathcal{M}(\Sigma, SU(2))$ est une "tranche réelle" dans $\mathcal{M}(\Sigma, SL(2,\mathbb{C}))$ et joue un rôle clé dans [MN]. Ici, le but est de comprendre la géométrie de cet espace utilisée dans la section 4 de [MN]. Il faudrait expliquer comment une décomposition en pantalons de la surface Σ donne une décomposition de l'espace des modules $\mathcal{M}(\Sigma, SU(2))$ au moyen d'une action d'un tore. Voir sections 3 et 5 de Jeffrey et Weitsman [JW1] et sections 2 et 3 de [JW2]. Pour les flots hamiltoniens associés, on aura sans doute de nouveau besoin de Goldman [G1].

Thème 4. *Définition des représentations TQFT en $A =$ une racine de l'unité, et calcul des traces (Lemma 3.4 dans* [MN]*).*

Plusieurs participants connaissent bien cela, aussi je ne donne pas plus de détails.

Comme on l'a déjà dit, il faudra aussi quelques exposés sur l'article [MN] luimême.

Exposés en option.

(1) *Le mapping class group agit de façon ergodique sur* $\mathcal{M}(\Sigma, SU(2))$. On trouvera un énoncé et des références dans [G2, Théorème 2].

(2) *Le cas du tore épointé.* Voir [G2, section 1.5.2] pour des formules explicites pour le crochet de Poisson. Voir aussi Brown [Br] pour une discussion explicite de $\mathcal{M}(\Sigma, SU(2))$ pour Σ un tore épointé.

References

[BG] I. Biswas, K. Guruprasad. Principal bundles on open surfaces and invariant functions on Lie groups. *Internat. J. Math.* 4 (1993), no. 4, 535–544.

[Br] R.J. Brown. Anosov mapping class actions on the SU(2)-representation variety of a punctured torus. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 18 (1998), no. 3, 539–554.

[Bu] D. Bullock. Rings of $\mathrm{SL}_2(C)$-characters and the Kauffman bracket skein module. *Comment. Math. Helv.* 72 (1997), no. 4, 521–542. (Disponible sur l'arXiv: q-alg/9604014)

[BFK] D. Bullock, C. Frohman, J. Kania-Bartoszyńska. Understanding the Kauffman bracket skein module. *J. Knot Theory Ramifications* 8 (1999), no. 3, 265–277. (Disponible sur l'arXiv : q-alg/9604013)

[G1] W. Goldman. Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations. *Invent. Math.* 85 (1986), no. 2, 263–302.

[G2] W. Goldman. Mapping class group dynamics on surface group representations. Problems on mapping class groups and related topics, 189–214, Proc. Sympos. Pure Math., 74. (Disponible sur l'arXiv : math/0509114)

[JW1] L. Jeffrey, J. Weitsman. Bohr-Sommerfeld orbits in the moduli space of flat connections and the Verlinde dimension formula. *Comm. Math. Phys.* 150 (1992), no. 3, 593–630.

[JW2] L. Jeffrey, J. Weitsman. Toric structures on the moduli space of flat connections on a Riemann surface: volumes and the moment map. *Adv. Math.* 106 (1994), no. 2, 151–168.

[MN] J. Marché, M. Narimannejad. Some Asymptotics of TQFT via skein theory. Voir http://www.institut.math.jussieu.fr/~marche

[M] G. Masbaum. Quantum representations of mapping class groups. In: *Groupes et Géométrie,* Journée annuelle 2003 de la SMF, pages 19-36. Disponible sur http://www.institut.math.jussieu.fr/~masbaum

[PS] J. Przytycki, A. Sikora. On skein algebras and $\mathrm{Sl}_2(C)$-character varieties. Topology 39 (2000), no. 1, 115–148. (Disponible sur l'arXiv: q-alg/9705011)

Liste provisoire d'exposés (version 6/12/07)

1) **Romain LEGENDRE** : *Base du skein module de Surface* $\times I$ *et calcul de* $\{a, b\}$ *par le crochet de Kauffman*

Les exposés 2) et 3) traitent du thème 1. Nous proposons le découpage suivant :

2) **Stepan OREVKOV** : *Variétés de représentations* $SL(2, \mathbb{C})$

Le but de l'exposé serait d'expliquer le Chapitre 1 de l'article [Culler, Shalen : Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds, Ann. Math. 117 (1983) 109-146] et d'en déduire les Théorèmes 1 et 2 de [Bu].

Un complément possible dans cet exposé serait le Théorème 8 de [Bu] (résultat de Gonzalez-Acuna et Montesinos cité et utilisé dans [Bu]).

3) **Emmanuel WAGNER** : *Fonctions traces et skein module en* $A = -1$.

Le but de l'exposé serait d'expliquer le Théorème 3 de [Bu], puis autant que possible du Théorème 10.

4) **Jean-Baptiste MEILHAN** : *Le skein module de Surface* $\times I$ *comme quantification de* $\mathcal{M}(\Sigma, SL(2, \mathbb{C}))$.

(suivant [BFK] + d'autres références à volonté)

5) **François LAUDENBACH** : *Structure symplectique sur* $\mathcal{M}(\Sigma, SL(2, \mathbb{C}))$ *et crochet de Goldman.*

(suivant Goldman)

6) **Gregor MASBAUM** : *TQFT et crochet de Kauffman*

Exposé introductif, mais il contiendra aussi le calcul en haut de la page 10 de [MN].

7) **Christian BLANCHET** : *Bases en TQFT et calcul des traces*

Le but de l'exposé serait d'expliquer le lemme 3.3. de [MN].

8) **Laurent CHARLES** : *Coordonnés actions-angles sur* $\mathcal{M}(\Sigma, SU(2))$ *associées à une décomposition en pantalons*

C'est le thème 3 du programme.

9) **Benjamin AUDOUX** : *Limite de traces = Somme de Riemann = Intégrale sur* $\mathcal{M}(\Sigma, SU(2))$

Le but de l'exposé serait d'expliquer le lemme 3.4. et la Prop. 4.1. de [MN].

10) **Greg MCSHANE** : *Le mapping class group agit de façon ergodique sur* $\mathcal{M}(\Sigma, SU(2))$.

11) **Julien MARCHE** : *Le cas du tore épointé.*