CC2 – Partie Analyse

I Développements limités et formules de Taylor

1. Cela signifie qu'il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tendant vers 0 en 0 telle que pour tout $x \in I$,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x).$$

2. Soit $x \neq 1$. Alors

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{j=1}^{n+1} x^j = 1 - x^{n+1}$$

(tous les autres termes s'annulent deux-à-deux), ce qui, puisque $1-x \neq 0$, donne l'égalité demandée. Ainsi, $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n \frac{x}{1-x}$, avec $\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-x} = 0$, ce qui donne le *DL* : $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$.

3.a. La fonction nulle a effectivement cette propriété. Soit maintenant P une fonction polynomiale non identiquement nulle de degré inférieur ou égal à n, i.e. de la forme $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ avec $(c_0, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$. Notons j le plus petit $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $c_k \neq 0$. Alors

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{1}{x^n}\sum_{k=0}^{n} c_k x^k = \frac{1}{x^n}\sum_{k=j}^{n} c_k x^k = \frac{1}{x^{n-j}}\sum_{k=j}^{n} c_k x^{k-j},$$

où la somme tend vers $c_j \neq 0$ quand x tend vers 0, et x^{n-j} tend vers 0 ou 1 (si $j = n$), donc le quotient ne peut tendre vers 0, ce qui conclut.

3.b. Supposons qu'il existe $(a_0, \ldots, a_n)$, $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et ε_a, $\varepsilon_b : I \to \mathbb{R}$ tendant vers 0 en 0 tels que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon_a(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + x^n \varepsilon_b(x).$$

Alors

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1}{x^n}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1}{x^n}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right) = 0,$$

donc par soustraction,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1}{x^n}\sum_{k=0}^{n}(a_k - b_k)x^k = 0$$

et donc $a_k - b_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ d'après la question précédente, ce qui conclut.

3.c. Si $n = 0$, il n'y a rien à montrer. Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ satisfait : pour tout $x \in I$,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon_n(x)$$

avec $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $\varepsilon_k : I \to \mathbb{R}$ tendant vers 0 en 0, alors on a aussi pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + x^k \underbrace{\left(a_{k+1}x + \cdots + a_n x^{n-k} + x^{n-k}\varepsilon_n(x)\right)}_{=:\varepsilon_k(x)}$$

avec $\varepsilon_k : I \to \mathbb{R}$ tendant vers 0 en 0 comme somme (finie) de fonctions tendant vers 0, ce qui donne un $DL_k(0)$ dont la partie polynomiale s'obtient en tronquant au rang k celle du $DL_n(0)$.

4. On peut prendre par exemple la fonction $f : x \mapsto x^{3/2}$. On a $f(x) = o(x) = 0 + 0 \cdot x + o(x)$, ce qui donne un $DL_1(0)$. Si elle avait un $DL_2(0)$, d'après la question précédente, il serait de la forme $f(x) = a_2x^2 + o(x^2)$, mais quel que soit $a_2 \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{x^2}(f(x) - a_2x^2) = +\infty$, ce qui conclut.

5. Supposons f dérivable en 0. Alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0), \text{ i.e. } \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x} - f'(0)\right) = 0 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x}\right),$$

ce qui donne le $DL_1(0)$ suivant : $f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$.

Supposons à l'inverse que f admet un $DL_1(0)$: $f(x) = a_0 + a_1x + x\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tendant vers 0 en 0. Alors $\lim_{x\to 0} a_0 + a_1x + x\varepsilon(x) = a_0 = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ par continuité. On a donc

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = a_1 + \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} a_1,$$

limite finie, donc par définition, f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$.

6.a. $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) = 1 + x^2 + o(x^3)$ et $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Ainsi,

$$h(x) = \frac{x^2 + o(x^3)}{x} - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

6.b. Ceci montre notamment que $\lim_{x\to 0} h(x) = 0 = h(0)$ donc que h est continue en 0, puis que h est dérivable d'après la question précédente, de dérivée 0. Sa tangente en 0 est donc simplement l'axe des abscisses. Au voisinage de 0, $h(x) = x^2(\frac{1}{2} + \varepsilon(x))$ avec ε tendant vers 0 en 0, donc h est positive au voisinage de 0, donc son graphe est situé au dessus de sa tangente au voisinage de l'origine.

7.a. Démontrons par récurrence sur j que la propriété

$$P(j) : \quad \forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{j} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^j}{j!} f^{(j+1)}(t)dt$$

est vraie pour tout $j \in [\![0, n]\!]$.

Initialisation. $P(0)$ s'écrit :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(0) + \int_0^x \frac{1}{0!} f'(t)dt,$$

ce qui est vrai (théorème fondamental de l'analyse), f étant au moins C^1.

Hérédité. Supposons $P(j)$ vraie pour un certain $j \in [\![0, n-1]\!]$. Soit $x \in I$. Sur $[0, x]$, les fonctions $u : t \mapsto -\frac{(x-t)^{j+1}}{(j+1)!}$ et $f^{(j+1)}$ sont C^1 ($j+1 \leq n$ et f est C^{n+1}) donc on peut effectuer l'IPP :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{(x-t)^j}{j!} f^{(j+1)}(t)dt = \int_0^x u'(t)v(t)dt = \big[u(t)v(t)\big]_0^x - \int_0^x u(t)v'(t)dt \\ = \left(0 + \frac{x^{j+1}}{(j+1)!} f^{(j+1)}(0)\right) + \int_0^x \frac{(x-t)^{j+1}}{(j+1)!} f^{(j+2)}(t)dt\end{aligned}$$

ce qui, combiné à $P(j)$, donne :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{j+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{j+1}}{(j+1)!} f^{(j+2)}(t)dt,$$

et ce pour tout $x \in I$, donc $P(j+1)$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

7.b. Par hypothèse, $f^{(n+1)}$ est continue sur I, donc bornée sur tout segment inclus dans I, ce qui donne le résultat voulu.

7.c. Pour tout $x \in [a,b]$, si $x > 0$,

$$|R_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \right| \leq \int_0^x \underbrace{\left| \frac{(x-t)^n}{n!} \right|}_{= \frac{(x-t)^n}{n!}} \underbrace{\left| f^{(n+1)}(t) \right|}_{\leq C} dt \leq C \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^x = \frac{Cx^{n+1}}{(n+1)!}$$

On procède de façon similaire si $x < 0$, en prenant garde aux signes.

7.d. En appliquant ceci à un *voisinage* $[a;b]$ de 0, ceci montre que $\varepsilon(x) := \frac{R_n(x)}{x^n}$ (pour $x \in I$, $x \neq 0$) tend vers 0 en 0, ce qui donne pour $DL_n(0)$ la *formule de Taylor-Young*. Celle-ci est valable aussi si, par exemple, f est seulement C^n, ou même C^{n-1} et de dérivée $(n-1)$-ième dérivable.

8.a. La fonction g étant nulle en 0 et $|\sin|$ étant majorée par 1 sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $|g(x)| \leq |x^{n+2}|$, donc $g(x) = o(x^{n+1})$.

8.b. Notons h la fonction à étudier (définie sur $\mathbb{R}^*$). Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $x_k = (2k\pi)^{-\frac{1}{n+1}}$ et $y_k = (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)^{-\frac{1}{n+1}}$. Par construction, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f(x_k) = \cos(2k\pi) = 1$ et $f(y_k) = \cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 0$, or les suites $(x_k)_k$ et $(y_k)_k$ convergent vers 0. Ceci montre que h n'a pas de limite en 0.

8.c. Le DL de 7.a. montre que g est continue en 0, et aussi dérivable d'après 4. Elle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par composition et produit de fonctions C^∞, et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g'(x) = (n+2)x^{n+1} \sin(\tfrac{1}{x^{n+1}}) + x^{n+2}(-\tfrac{n+1}{x^{n+2}}) \cos(\tfrac{1}{x^{n+1}}) = \underbrace{(n+2)x^{n+1} \sin(\tfrac{1}{x^{n+1}})}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} - \underbrace{(n+1)\cos(\tfrac{1}{x^{n+1}})}_{\text{sans limite en 0}}.$$

Donc g' n'a pas de limite en 0, et donc pas de $DL_0(0)$.

8.d. Ceci montre que la condition donnée en 6.(d) n'est pas nécessaire car pour $n = 1$ par exemple, la fonction g ci-avant admet un $DL_2(0)$ sans être C^1.

II Développement en série entière et série de Taylor

Questions préliminaires.

1. Si $x \in]-1,1[$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$. Autrement dit, la série $(\sum_{k\in\mathbb{N}} x^k)$ converge et $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$, ce qui montre que la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est développable en séries entières en 0. Le développement fourni est valable sur $]-1,1[$ (d'après ce qui précède) et pas ailleurs, la série $(\sum_{k\in\mathbb{N}} x^k)$ étant divergente pour $|x| \geq 1$.

2. Soit $x \in]0,+\infty[$ et $[a,b] \subset]0,+\infty[$ (on n'effectue pas d'IPP sur les intégrales généralisées, à moins de justifier au préalable la convergence de tout ce qui va être mis en jeu, du coup ça revient au même que ce que l'on fait ici). Les fonctions $u : t \mapsto t^x$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ sont C^1 sur $[a,b]$, de dérivés $u' : t \mapsto xt^{x-1}$ et $v' : t \mapsto e^{-t}$. On peut donc effectuer l'IPP :

$$\int_a^b t^x e^{-t} dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_a^b + \int_a^b xt^{x-1}e^{-t}dt = a^x e^{-a} - b^x e^{-b} + x\int_a^b t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Comme $x > 0$, $\lim_{a\to 0} a^x e^{-a} = 0 \times 1 = 0$, et par croissances comparées, $\lim_{b\to 0} b^x e^{-b} = 0$. De plus, par définition, pour tout $y > 0$,

$$\lim_{\substack{a\to 0\\ b\to+\infty}} \int_a^b t^{y-1}e^{-t}dt = \Gamma(y)$$

donc on obtient bien par double passage à la limite en a et b (dans l'ordre où on veut) : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Par une récurrence immédiate, cela donne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\Gamma(n) = (n-1)!\Gamma(1)$. Or $\Gamma(1) = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = e^0 - \lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 1$, et donc finalement $\Gamma(n) = (n-1)!$.

A. Régularité des fonctions développables en séries entières.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n(r')^n| = |a_n|r^n(\frac{r'}{r})^n = o((\frac{r'}{r})^n)$ puisque $(a_nr^n)_n$ tend vers 0 comme terme général d'une série convergente. Or comme $|\frac{r'}{r}| < 1$, $(\frac{r'}{r})^n$ est le TG d'une série convergente (d'après ce qui précède). Les TG comparés étant positifs, par comparaison, $|a_n(r')^n|$ est le TG d'une série convergente, ce qui montre la convergence absolue demandée.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|na_n(r'')^{n-1}| = \frac{1}{r''}|n(\frac{r''}{r'})^n| \times |a_n(r')^n| = o(|a_n(r')^n|)$ car $\frac{1}{r''}|n(\frac{r''}{r'})^n|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ par croissances comparées, puisque $|\frac{r''}{r'}| < 1$. On conclut alors comme précédemment.

3. Soit $x \in]-R,R[$. Si $x = 0$, la CVA demandée est immédiate (tous les termes sauf éventuellement un sont nuls). Sinon, puisque $|x| < R$, il existe r et r' strictement positifs tels que $0 < |x| < r' < r < R$. Par hypothèse, la série $(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nr^n)$ converge, donc d'après la question 1, la série $(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n(r')^n)$ converge absolument, et ceci entraîne d'après la question 2 la convergence absolue de $(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} na_n|x|^{n-1})$, i.e. celle de $(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} na_nx^{n-1})$.

4. On reconnaît la série $(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} na_nx^{n-1})$ avec $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Or on a vu, en posant $a_0 = 0$, que $(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nx^n)$ convergeait pour tout $x \in]-1,1[$ et avait pour somme $S(x) = \frac{1}{1-x}$. Donc d'après le résultat admis, pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = S'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ (et pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus]-1,1[$, la série diverge grossièrement).

5.a. Soit $R > 0$. Démontrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la propriété $P(p)$: si une fonction f admet un développement en série entière en 0 de coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valable sur $]-R,R[$ $(*)$, alors f est de classe C^p sur $]-R,R[$ et

$$\forall x \in]-R,R[, \quad f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!}a_nx^{n-p} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+p)!}{k!}a_{k+p}x^k.$$

Initialisation. D'après le résultat admis après la question 3, si f satisfait $(*)$, f est dérivable sur $]-R,R[$, donc en particulier continue, et on a bien

$$\forall x \in]-R,R[, \quad f^{(0)}(x) = f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n!}a_nx^n$$

.

Hérédité. Supposons $P(p)$ vraie pour un certain $p \in \mathbb{N}$. Alors $f^{(p)}$ satisfait $(*)$ en remplaçant $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{(n+p)!}{n!}a_{n+p})_{n\in\mathbb{N}}$. On peut alors lui appliquer le résultat admis, qui affirme qu'elle est dérivable sur $]-R,R[$, de dérivée

$$(f^{(p)})'x \in]-R,R[\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} nb_nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{(n+p)!}{n!}a_{n+p}x^{n-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1+p)!}{k!}a_{k+1+p}x^k$$

par glissement d'indice, et cette fonction est elle-même dérivable par une nouvelle application du résultat admis, donc continue, ce qui signifie que f est de classe C^{p+1}, et achève la récurrence.

5.b. On remarque que si f satisfait $(*)$ (et est donc C^∞ sur $]-R,R[$ par la question précédente), en particulier, en 0, la formule pour les dérivées successives donne, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(0) = p!a_p$, ou encore $a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$. Ainsi, les coefficients du DSE sont uniques et coïncident avec les coefficients de Taylor.

5.c. Ceci découle directement de la réponse précédente et de la question 7.d.

B. Une réciproque ?

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto g_t(x)$ est continue sur $J = [0, +\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, donc elle est intégrable sur tout segment de J. En outre, pour tout $t \in J$, $|g_t(x)| \leq e^{-t}$, et $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur J, donc par comparaison, $t \mapsto g_t(x)$ l'est aussi, ce qui signifie que f est bien définie.

2. Si $t = 0$, g_t est constante égale à e^{-t}, ce qui donne les dérivées voulues. Si $t > 0$, d'après II.QP.1, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|tx^2| < 1$, i.e. tel que $|x| < t^{-1/2}$,

$$g_t(x) = e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}(-tx^2)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = e^{-t}(-t)^n$ et $a_{2n+1} = 0$. On conclut avec A.5.b : il y avait une coquille dans l'énoncé, il manquait $(-1)^n$ dans $(g_t)^{(2n)}(0)$.

3. La formule admise pour les dérivées de f donne alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(2n)}(0) = \int_0^{+\infty} (g_t)^{(2n)}(0)dt = (-1)^n(2n)!\int_0^{+\infty} e^{-t}t^n dt = (-1)^n(2n)!\Gamma(n+1) = (-1)^n(2n)!n!$$

et

$$f^{(2n+1)}(0) = \int_0^{+\infty} (g_t)^{(2n+1)}(0)dt = 0.$$

4. La série en question est $(\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n n!(x^2)^n)$, dont le TG diverge pour tout x non nul. D'après A.5.b, f n'est pas développable en série entière en 0. Elle y admet en revanche un DL à tout ordre puisqu'elle est C^∞ sur $\mathbb{R}$! (cf. I.7.d).

C. Une condition suffisante.

1. En reprenant I.7.c, on obtient, pour tout $x \in]-R,R[$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \right| \leq \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui donne le résultat voulu.

2. Pour justifier l'indication, comme dans I.7.b : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. f est C^n sur $\mathbb{R}$, donc $f^{(n)}$ est continue sur $[-R,R]$ compact, donc y est bornée, ce qui conclut. Or on a vu qu'une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ n'était pas forcément DSE en 0.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\sin^{(n)}| = |\cos|$ ou $|\sin|$, majorées toutes deux sur $\mathbb{R}$ par 1, donc $(**)$ est satisfaite (avec $M = 1$ et $R = +\infty$), et la question 1 donne donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, par une récurrence immédiate à partie des relation $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$, $\sin^{(2k)} = (-1)^k \sin$ et $\sin^{(2k+1)} = (-1)^k \cos$, ce qui, avec $\sin(0) = 0$ et $\cos(0) = 1$, donne finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

4. En divisant par x, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$h(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k}.$$

En outre,

$$h(0) = 1 = \frac{(-1)^0}{(2 \times 0 + 1)!} 0^0 + 0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} 0^{2k},$$

donc finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k}$$

ce qui veut dire que h admet un développement en série entière en 0 valable sur $\mathbb{R}$ tout entier, donc en particulier que h est C^∞ sur $\mathbb{R}$ d'après II.A.5.