Université Grenoble Alpes **M1EEF**
MAT 801 **Année 2018-2019**

CC2 – Partie Analyse

On rappelle que pour une fonction f quelconque, la “dérivée 0-ième” $f^{(0)}$ désigne simplement f, et que $x^0 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, y compris 0.

I Développements limités et formules de Taylor

Dans ce qui suit, I désigne un intervalle contenant 0.

On rappelle que, si f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et n un entier naturel, on dit que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 (en abrégé, $DL_n(0)$) s'il existe des réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que

$$(*) \quad f(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x \in I}}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

On appelle alors $x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ la *partie polynomiale* du $DL_n(0)$.

1. Rappeler ce que signifie l'expression $(*)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Redémontrer que

$$\forall x \neq 1, \quad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

   En déduire un $DL_n(0)$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que la seule fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à n satisfaisant $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{P(x)}{x^n} = 0$ est la fonction nulle.
   (b) En déduire que si, pour un $n \in \mathbb{N}$ donné, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admet un $DL_n(0)$, celui-ci est unique.
   (c) Montrer que si, pour un $n \in \mathbb{N}$ donné, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admet un $DL_n(0)$, elle admet, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, un $DL_k(0)$, dont on précisera la partie polynomiale en fonction de celle du $DL_n(0)$.
4. Donner un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ admettant un $DL_1(0)$ mais pas de $DL_2(0)$.
5. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0. Montrer que f admet un $DL_1(0)$ si et seulement si f est dérivable en 0, et expliciter dans ce cas le DL en question.
6. (a) Donner un $DL_3(0)$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{x^2}$, puis un $DL_2(0)$ de la fonction h définie sur $]-1, +\infty[$ par

$$h(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \neq 0, \quad h(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x} - \ln(1 + x).$$

   (b) Justifier que h est continue et dérivable en 0, déterminer la tangente $\mathcal{D}$ au graphe $\mathcal{G}$ de h en $(0, h(0))$ et préciser, en justifiant, la position de $\mathcal{G}$ par rapport à $\mathcal{D}$ au voisinage de ce point.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère maintenant une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1}.

(a) Montrer à l'aide d'une récurrence la *Formule de Taylor avec reste intégral* :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

On notera $R_n(x)$ le "reste" $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$.

(b) Justifier que pour tout segment $[a,b] \subset I$, il existe $C > 0$ tel que : $\forall t \in [a,b]$, $|f^{(n+1)}(t)| \leq C$.

(c) On fixe un tel $[a,b]$ et un tel $C > 0$. Montrer que

$$\forall x \in [a,b], \quad |R_n(x)| \leq \frac{C}{(n+1)!} |x|^{n+1}.$$

(d) En déduire que f admet un $DL_n(0)$. Donner une condition suffisante plus faible, toujours en termes de régularité de f, pour que f admette un tel DL.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(0) = 0$ et pour tout $x \neq 0$, $g(x) = x^{n+2} \sin(\frac{1}{x^{n+1}})$.
   (a) Montrer que g admet un DL à l'ordre $n+1$ en 0.
   (b) Montrer que $\cos(\frac{1}{x^{n+1}})$ n'a pas de limite quand x tend vers 0.
   (c) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais que g' n'admet pas de DL à l'ordre 0 en 0.
   (d) La condition suffisante proposée en 6.(d) est-elle nécessaire ?

II Développement en série entière et série de Taylor

Étant donnée une fonction C^∞ au voisinage de 0, on appellera *coefficients de Taylor* de f en 0 la suite $(\frac{f^{(n)}(0)}{n!})_{n\in\mathbb{N}}$.

Une fonction f est dite *développable en série entière en* 0 s'il existe $R > 0$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que f est définie sur $]-R, R[$ (au moins) et

$$\forall x \in]-R,R[, \quad \text{la série } (\textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n) \text{ converge et } f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On ne suppose ici aucune connaissance préalable de ce type de fonctions.

Questions préliminaires.

1. Montrer à l'aide de la question I.2. que $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est développable en série entière en 0, en précisant le domaine de validité du développement proposé.
2. On admet que la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est bien définie sur $]0,+\infty[$. Montrer soigneusement que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire, pour tout entier naturel non nul n, la valeur de $\Gamma(n)$.

A. Régularité des fonctions développables et série entière.

Dans les questions 1 à 4, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite réelle et R un réel strictement positif. Dans les questions 1 et 2, r, r' et r'' désignent des réels strictement positifs satisfaisant $r > r' > r''$.

1. Montrer que si la série $(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n r^n)$ converge, alors la série $(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (r')^n)$ converge absolument.
2. Montrer que si la série $(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|(r')^n)$ converge, alors la série $(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n|a_n|(r'')^{n-1})$ converge (on pourra faire apparaître une suite de la forme $(n\alpha^n)_n$).

3. On suppose maintenant que, pour tout $x \in]-R, R[$, la série $(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n)$ converge. On note alors S la fonction définie sur $]-R, R[$ par

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Justifier que pour tout $x \in]-R, R[$, la série $(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n a_n x^{n-1})$ converge absolument.

On admet dorénavant que dans cette situation, S est dérivable sur $]-R, R[$, de dérivée

$$S' : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$$

(sommes bien définies d'après ce qui précède).

4. *Exemple.* Déterminer pour quels $x \in \mathbb{R}$ la série $(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n x^{n-1})$ converge, et pour ces x, exprimer simplement $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$ en fonction de x.
5. (a) Démontrer par récurrence qu'une fonction f admettant un développement en série entière en 0 de coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valable sur $]-R, R[$ (avec $R > 0$) :
   - est C^∞ sur $]-R, R[$,
   - a des dérivées successives qui satisfont :

   $$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R, R[, \quad f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+p)!}{k!} a_{k+p} x^k.$$

   (b) En déduire que si une fonction f est développable en série entière en 0, un tel développement est unique (on pourra exprimer les coefficients en termes des coefficients de Taylor de f en 0).

   (c) En déduire (sans calcul) que si une fonction f satisfait, $\forall x \in]-R, R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $R > 0$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

B. Une réciproque ?

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx^2} dt = \int_0^{+\infty} g_t(x) dt, \quad \text{avec } g_t(x) = \frac{e^{-t}}{1+tx^2} \text{ pour tout } t \in [0, +\infty[.$$

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$. On admet qu'elle y est C^∞ et que ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation sous l'intégrale, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} (g_t)^{(p)}(x) dt.$$

2. Donner, pour tout $t \geq 0$, un développement en série entière de g_t en 0, et en déduire que les dérivées successives de g_t en 0 satisfont :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (g_t)^{(2n)}(0) = (2n)! e^{-t} t^n \quad \text{et} \quad (g_t)^{(2n+1)}(0) = 0.$$

3. En déduire les dérivées successives de f en 0.

4. Pour quels $x \in \mathbb{R}$ la série $(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n)$ est-elle convergente ? La fonction f est-elle développable en série entière en 0 ? Admet-elle un développement limité à tout ordre en 0 ?

C. Une condition suffisante.

1. Soit $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et f une fonction C^∞ sur $]-R, R[$ telle que :

$$(**) \quad \exists M > 0,\, \forall n \in \mathbb{N},\, \forall x \in\,]-R, R[, \quad |f^{(n)}(x)| \leq M.$$

   Montrer, en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, que

$$\forall x \in\,]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

2. Le résultat reste-t-il vrai si l'on remplace $(**)$ par :

$$(**') \quad \forall n \in \mathbb{N}, \exists M > 0,\, \forall x \in\,]-R, R[, \quad |f^{(n)}(x)| \leq M \qquad ?$$

   On pourra remarquer, en le justifiant, que si $R \in \mathbb{R}_+^*$, toute fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ satisfait $(**')$.
3. Utiliser ce qui précède pour déterminer un développement en série entière de la fonction sin en 0, valable sur $\mathbb{R}$ tout entier.
4. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \neq 0, \quad h(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

   Utiliser ce qui précède pour montrer que h est C^∞ sur $\mathbb{R}$.