

# Des feuilletages aux difféomorphismes de l'intervalle

Hélène Eynard-Bontemps

Journée de rentrée de l'IMJ-PRG  
6 novembre 2025

# Une question

Objets :

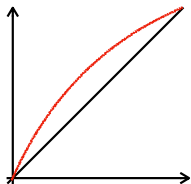
Difféomorphismes de l'intervalle ( $\text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ )

## Une question

Objets :

Difféomorphismes de l'intervalle ( $\text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ );

- $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
- $f(0) = 0, f(1) = 1$
- $f \in C^\infty$
- $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .

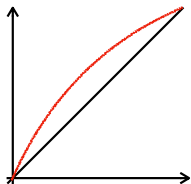


## Une question

Objets :

Difféomorphismes de l'intervalle ( $\text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ );

- $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
- $f(0) = 0, f(1) = 1$
- $f \in C^\infty$
- $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .



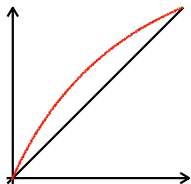
Ou plutôt... Paires  $(f, g)$  telles que  $f \circ g = g \circ f$ .

## Une question

Objets :

Difféomorphismes de l'intervalle ( $\text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ );

- $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
- $f(0) = 0, f(1) = 1$
- $f \in C^\infty$
- $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .



Ou plutôt... Paires  $(f, g)$  telles que  $f \circ g = g \circ f$ . Exemples :

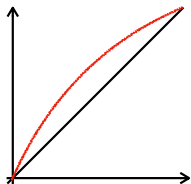
- $(h^{\circ k}, h^{\circ l}), h \in \text{Diff}_+^\infty[0, 1], k, l \in \mathbb{Z}$
- $(\phi_X^\alpha, \phi_X^\beta), X$  champ de vecteurs  $C^\infty, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

## Une question

Objets :

Difféomorphismes de l'intervalle ( $\text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ ) ;

- $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
- $f(0) = 0, f(1) = 1$
- $f \in C^\infty$
- $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .



Ou plutôt... Paires  $(f, g)$  telles que  $f \circ g = g \circ f$ . Exemples :

- $(h^{ok}, h^{ol}), h \in \text{Diff}_+^\infty[0, 1], k, l \in \mathbb{Z}$
- $(\phi_X^\alpha, \phi_X^\beta), X$  champ de vecteurs  $C^\infty, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

### Question

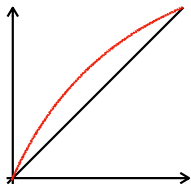
$\{(f, g) \in (\text{Diff}_+^\infty[0, 1]) ; f \circ g = g \circ f\}$  est-il connexe par arcs ?

## Une question

Objets :

Difféomorphismes de l'intervalle ( $\text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ ) ;

- $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
- $f(0) = 0, f(1) = 1$
- $f \in C^\infty$
- $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .



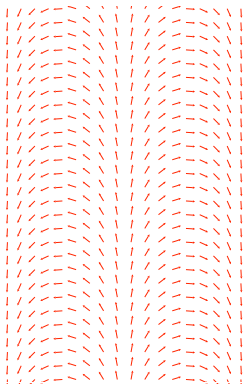
Ou plutôt... Paires  $(f, g)$  telles que  $f \circ g = g \circ f$ . Exemples :

- $(h^{\circ k}, h^{\circ l}), h \in \text{Diff}_+^\infty[0, 1], (h_t^{\circ k}, h_t^{\circ l}), h_t = (1 - t)h + t \text{Id}$ .
- $(\phi_X^\alpha, \phi_X^\beta), (\phi_X^{t\alpha}, \phi_X^{t\beta})$ .

### Question

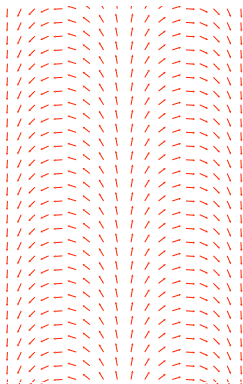
$\{(f, g) \in (\text{Diff}_+^\infty[0, 1]) ; f \circ g = g \circ f\}$  est-il connexe par arcs ?

# Une motivation

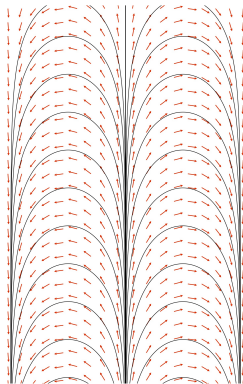


Champ de vecteurs

## Une motivation



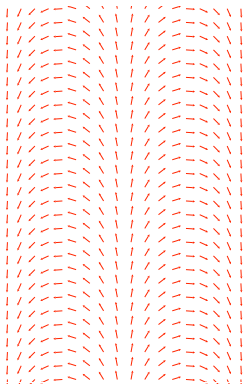
Champ de vecteurs



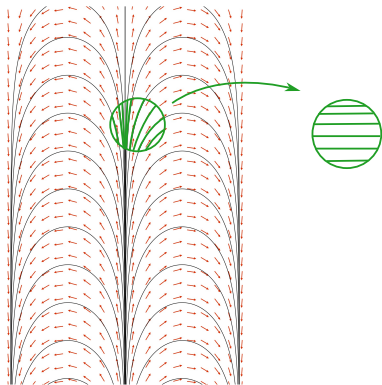
Courbes intégrales



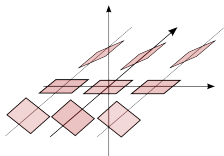
## Une motivation



Champ de vecteurs

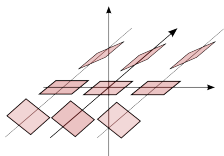


Courbes intégrales



Champ de plans  
 $p \in M \mapsto \xi_p \text{ plan} \subset T_p M$

## Une motivation

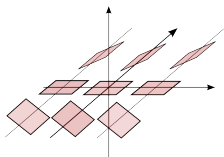


Champ de plans  
 $p \in M \mapsto \xi_p \text{ plan} \subset T_p M$

## Une motivation

Descriptions locales possibles :

- $\xi = \ker(\alpha)$  avec  $\alpha$  1-forme différentielle ;

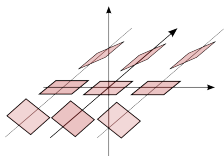


Champ de plans  
 $p \in M \mapsto \xi_p \text{ plan} \subset T_p M$

## Une motivation

Descriptions locales possibles :

- $\xi = \ker(\alpha)$  avec  $\alpha$  1-forme différentielle ;
- $\xi = \nu^\perp$  avec  $\nu$  champ de vecteurs ;

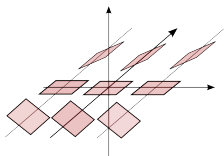


Champ de plans  
 $p \in M \mapsto \xi_p \text{ plan} \subset T_p M$

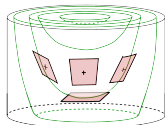
## Une motivation

Descriptions locales possibles :

- $\xi = \ker(\alpha)$  avec  $\alpha$  1-forme différentielle ;
- $\xi = \nu^\perp$  avec  $\nu$  champ de vecteurs ;
- $\xi = \text{Vect}(X, Y)$  avec  $X, Y$  champs de vecteurs linéairement indépendants.



Champ de plans  
 $p \in M \mapsto \xi_p \text{ plan } \subset T_p M$

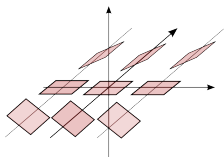


En général, il n'existe pas de *surfaces intégrales*.

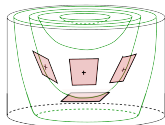
## Une motivation

Descriptions locales possibles :

- $\xi = \ker(\alpha)$  avec  $\alpha$  1-forme différentielle ;
- $\xi = \nu^\perp$  avec  $\nu$  champ de vecteurs ;
- $\xi = \text{Vect}(X, Y)$  avec  $X, Y$  champs de vecteurs linéairement indépendants.



Champ de plans  
 $p \in M \mapsto \xi_p \text{ plan } \subset T_p M$

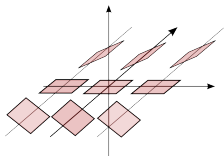


## Une motivation

Descriptions locales possibles :

- $\xi = \ker(\alpha)$  avec  $\alpha$  1-forme différentielle ;
- $\xi = \nu^\perp$  avec  $\nu$  champ de vecteurs ;
- $\xi = \text{Vect}(X, Y)$  avec  $X, Y$  champs de vecteurs linéairement indépendants.

**En général, il n'existe pas de *surfaces intégrales*.**  
Si par tout point passe une surface intégrale,  $\xi$  est dit **intégrable**.

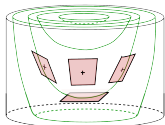


Champ de plans  
 $p \in M \mapsto \xi_p \text{ plan } \subset T_p M$

## Une motivation

Descriptions locales possibles :

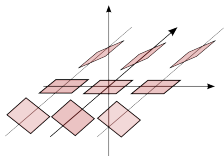
- $\xi = \ker(\alpha)$  avec  $\alpha$  1-forme différentielle ;
- $\xi = \nu^\perp$  avec  $\nu$  champ de vecteurs ;
- $\xi = \text{Vect}(X, Y)$  avec  $X, Y$  champs de vecteurs linéairement indépendants.



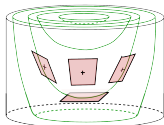
En général, il n'existe pas de *surfaces intégrales*.  
Si par tout point passe une surface intégrale,  $\xi$  est dit *intégrable*.

## Théorème (Frobenius)

$\xi$  *intégrable*  $\Leftrightarrow \alpha \wedge d\alpha \equiv 0 \Leftrightarrow \nu \cdot \text{Rot}(\nu) \equiv 0 \Leftrightarrow [X, Y] \in \text{Vect}(X, Y)$ .



Champ de plans  
 $p \in M \mapsto \xi_p \text{ plan } \subset T_p M$



En général, il n'existe pas de *surfaces intégrales*.  
Si par tout point passe une surface intégrale,  $\xi$  est dit *intégrable*.

## Une motivation

Descriptions locales possibles :

- $\xi = \ker(\alpha)$  avec  $\alpha$  1-forme différentielle ;
- $\xi = \nu^\perp$  avec  $\nu$  champ de vecteurs ;
- $\xi = \text{Vect}(X, Y)$  avec  $X, Y$  champs de vecteurs linéairement indépendants.

## Théorème (Frobenius)

$\xi$  *intégrable*  $\Leftrightarrow \alpha \wedge d\alpha \equiv 0 \Leftrightarrow \nu \cdot \text{Rot}(\nu) \equiv 0 \Leftrightarrow [X, Y] \in \text{Vect}(X, Y)$ .

En coordonnées, si  $\alpha = udx + vdy + wdz$  et  $\nu = (u, v, w)$ ,

$$\alpha \wedge d\alpha = \underbrace{\left( u \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + v \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + w \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right)}_{\nu \cdot \text{Rot}(\nu)} dx \wedge dy \wedge dz$$

Toute 3-variété compacte sans bord admet un champ de plans  
( $\Leftarrow$  caractéristique d'Euler nulle).

Toute 3-variété compacte sans bord admet un champ de plans  
( $\Leftarrow$  caractéristique d'Euler nulle).

## Théorème (Wood, Thurston, ~69)

*Tout champ de plans peut être déformé continûment en champ de plans intégrable.*

Toute 3-variété compacte sans bord admet un champ de plans  
( $\Leftarrow$  caractéristique d'Euler nulle).

## Théorème (Wood, Thurston, ~69)

*Tout champ de plans peut être déformé continûment en champ de plans intégrable.*

Énoncé de type ***h-principe*** (« toute solution formelle est homotope à une vraie solution »).

Toute 3-variété compacte sans bord admet un champ de plans  
( $\Leftarrow$  caractéristique d'Euler nulle).

## Théorème (Wood, Thurston, $\sim 69$ )

*Tout champ de plans peut être déformé continûment en champ de plans intégrable.*

Énoncé de type ***h-principe*** (« toute solution formelle est homotope à une vraie solution »).

Et à paramètres ?

Toute 3-variété compacte sans bord admet un champ de plans  
( $\Leftarrow$  caractéristique d'Euler nulle).

## Théorème (Wood, Thurston, $\sim 69$ )

*Tout champ de plans peut être déformé continûment en champ de plans intégrable.*

Énoncé de type ***h-principe*** (« toute solution formelle est homotope à une vraie solution »).

Et à paramètres ?

## Question

Deux champs de plans intégrables homotopes peuvent-ils être reliés par un chemin de champs de plans **intégrables** ?

Toute 3-variété compacte sans bord admet un champ de plans  
( $\Leftarrow$  caractéristique d'Euler nulle).

## Théorème (Wood, Thurston, $\sim 69$ )

*Tout champ de plans peut être déformé continûment en champ de plans intégrable.*

Énoncé de type ***h-principe*** (« toute solution formelle est homotope à une vraie solution »).

Et à paramètres ?

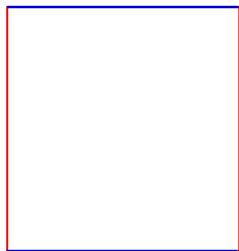
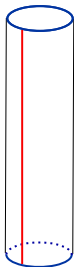
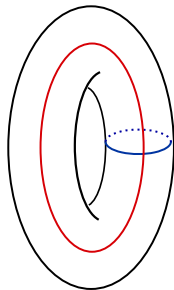
## Question

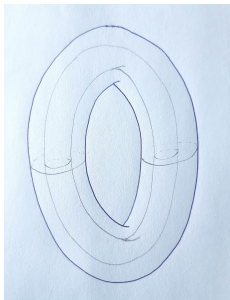
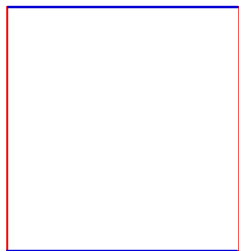
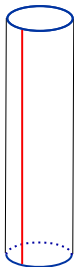
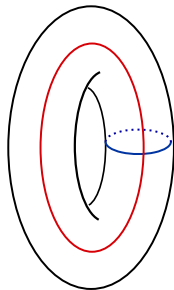
Deux champs de plans intégrables homotopes peuvent-ils être reliés par un chemin de champs de plans **intégrables** ?

## Théorème

« *Tout se ramène au cas particulier du tore épais  $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ . »*

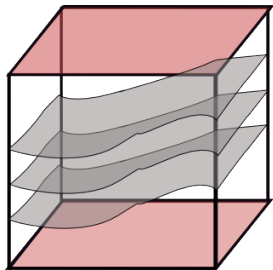
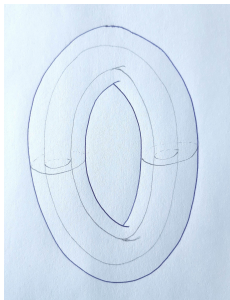
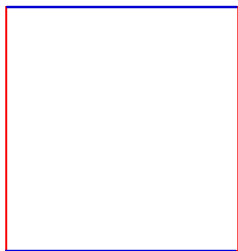
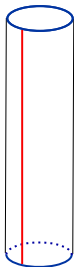
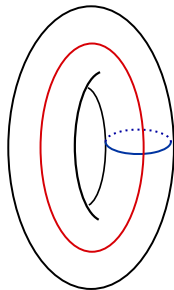
Inspiration/Outils : Thurston, Eliashberg, Schweitzer, Herman...





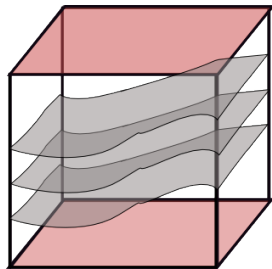
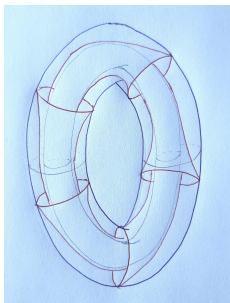
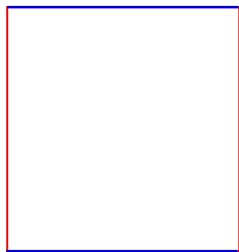
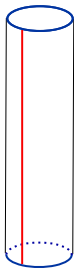
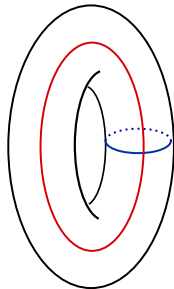
Des  
feuilletages  
aux difféomor-  
phismes de  
l'intervalle

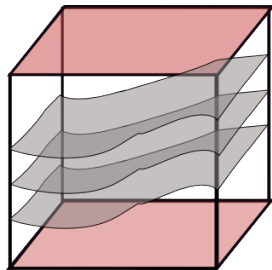
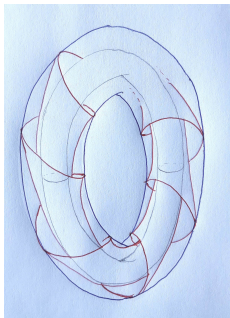
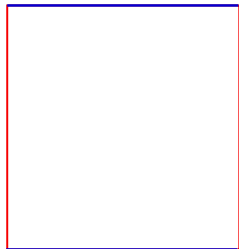
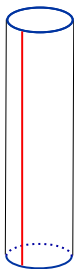
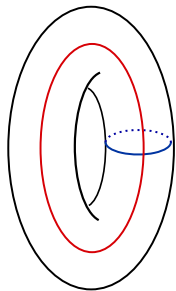
Hélène  
Eynard-  
Bontemps

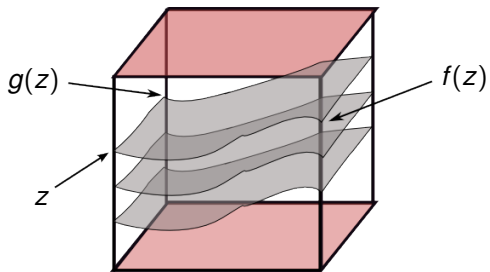


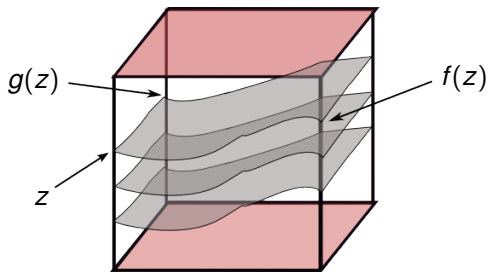
Des  
feuilletages  
aux difféomor-  
phismes de  
l'intervalle

Hélène  
Eynard-  
Bontemps

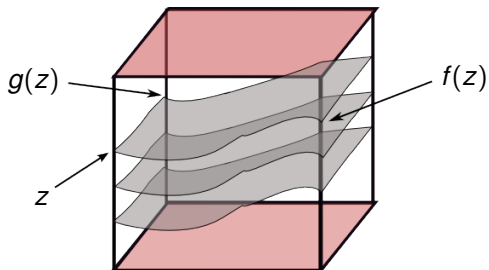




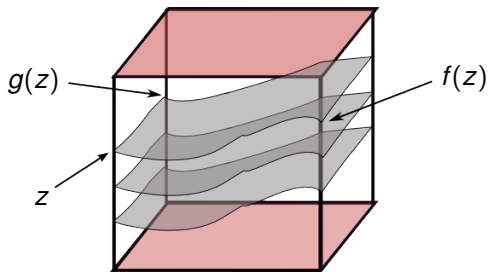




$$f, g \in \text{Diff}_+^\infty[0, 1]$$

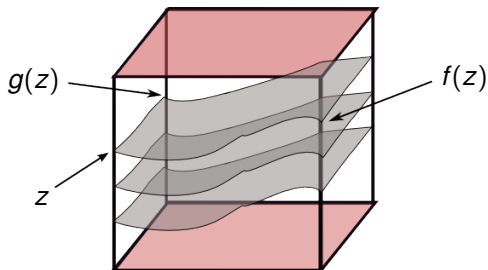


$$f, g \in \text{Diff}_+^\infty[0, 1], f \circ g = g \circ f.$$



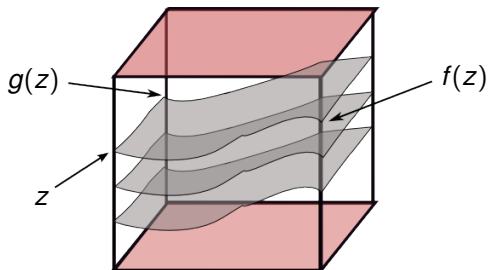
$$f, g \in \text{Diff}_+^\infty[0, 1], f \circ g = g \circ f.$$

→ Holonomie du feuilletage.



$f, g \in \text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ ,  $f \circ g = g \circ f$ .

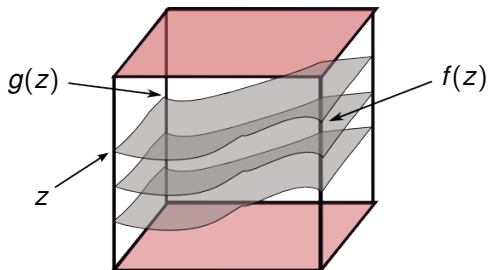
→ Holonomie du feuilletage.  $(\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2 \rightarrow \text{Diff}_+^\infty[0, 1])$



$f, g \in \text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ ,  $f \circ g = g \circ f$ .

→ **Holonomie du feuilletage.**  $(\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2 \rightarrow \text{Diff}_+^\infty[0, 1])$

Chemin de feuilletages  $\leftrightarrow$  Chemin d'holonomies

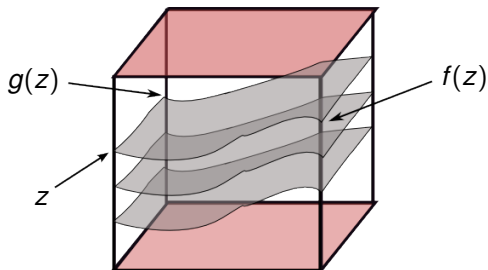


$f, g \in \text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ ,  $f \circ g = g \circ f$ .

→ **Holonomie du feuilletage.**  $(\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2 \rightarrow \text{Diff}_+^\infty[0, 1])$

Chemin de feuilletages  $\leftrightarrow$  Chemin d'holonomies

$\left\{ \mathbb{Z}^2 \overset{C^\infty}{\curvearrowright} [0, 1] \right\}$  est-il connexe par arcs ?



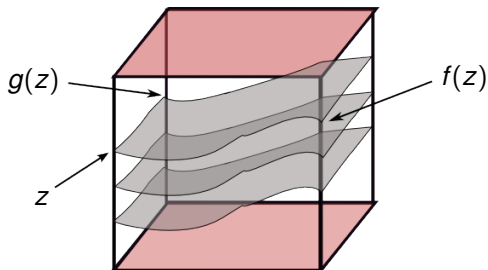
$f, g \in \text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ ,  $f \circ g = g \circ f$ .

→ **Holonomie du feuilletage.**  $(\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2 \rightarrow \text{Diff}_+^\infty[0, 1])$

Chemin de feuilletages  $\leftrightarrow$  Chemin d'holonomies

$\{\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{C^\infty} [0, 1]\}$  est-il connexe par arcs ?

- Il est *connexe* (Bonatti–EB, 2015).



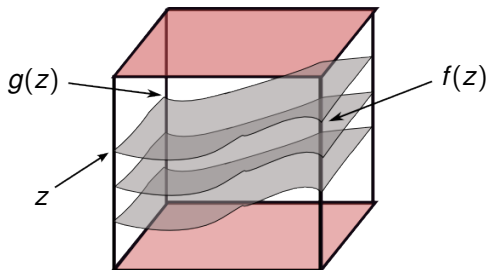
$f, g \in \text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ ,  $f \circ g = g \circ f$ .

→ **Holonomie du feuilletage.** ( $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2 \rightarrow \text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ )

Chemin de feuilletages  $\leftrightarrow$  Chemin d'holonomies

$\{\mathbb{Z}^2 \overset{C^\infty}{\curvearrowright} [0, 1]\}$  est-il connexe par arcs ?

- Il est *connexe* (Bonatti–EB, 2015).
- En  $C^0$ , contractile (« astuce d'Alexander »).



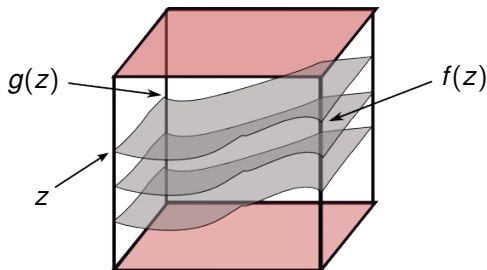
$f, g \in \text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ ,  $f \circ g = g \circ f$ .

→ **Holonomie du feuilletage.**  $(\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2 \rightarrow \text{Diff}_+^\infty[0, 1])$

Chemin de feuilletages  $\leftrightarrow$  Chemin d'holonomies

$\left\{ \mathbb{Z}^2 \overset{C^\infty}{\curvearrowright} [0, 1] \right\}$  est-il connexe par arcs ?

- Il est *connexe* (Bonatti–EB, 2015).
- En  $C^0$ , contractile (« astuce d'Alexander »).
- En  $C^1$ , connexe *par arcs* (Navas, 2014).



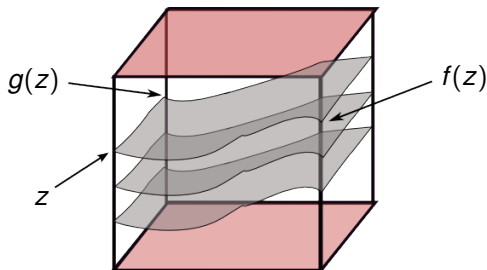
$f, g \in \text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ ,  $f \circ g = g \circ f$ .

→ **Holonomie du feuilletage.**  $(\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2 \rightarrow \text{Diff}_+^\infty[0, 1])$

Chemin de feuilletages  $\leftrightarrow$  Chemin d'holonomies

$\left\{ \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{C^\infty} [0, 1] \right\}$  est-il connexe par arcs ?

- Il est *connexe* (Bonatti–EB, 2015).
- En  $C^0$ , contractile (« astuce d'Alexander »).
- En  $C^1$ , connexe *par arcs* (Navas, 2014).
- En  $C^{1+ac}$  et  $C^\omega$ , connexe *par arcs* (EB–Navas, 2023).



$f, g \in \text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ ,  $f \circ g = g \circ f$ .

→ **Holonomie du feuilletage.**  $(\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2 \rightarrow \text{Diff}_+^\infty[0, 1])$

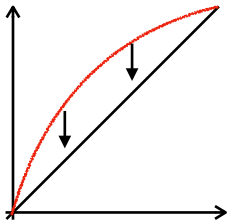
Chemin de feuilletages  $\leftrightarrow$  Chemin d'holonomies

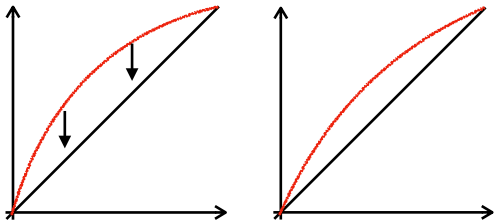
$\left\{ \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{C^\infty} [0, 1] \right\}$  est-il connexe par arcs ?

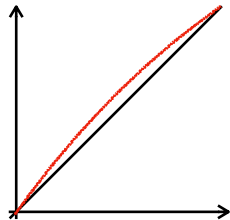
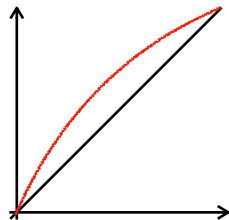
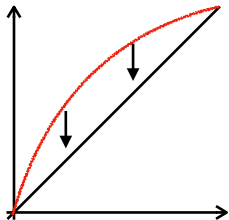
- Il est *connexe* (Bonatti–EB, 2015).
- En  $C^0$ , contractile (« astuce d'Alexander »).
- En  $C^1$ , connexe *par arcs* (Navas, 2014).
- En  $C^{1+ac}$  et  $C^\omega$ , connexe *par arcs* (EB–Navas, 2023).
- **Inconnu dans les autres régularités.**

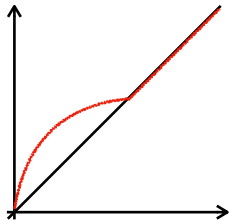
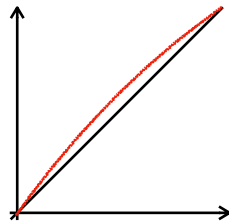
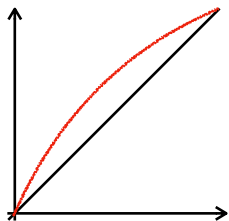
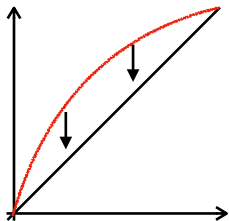
Des  
feuilletages  
aux difféomor-  
phismes de  
l'intervalle

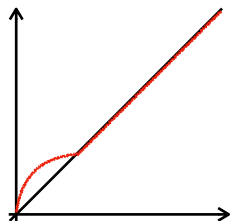
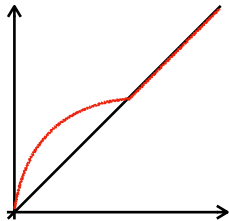
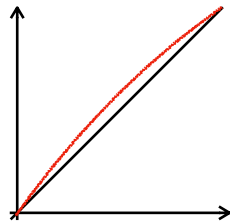
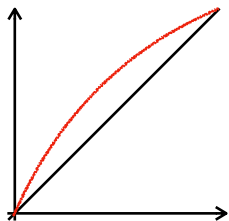
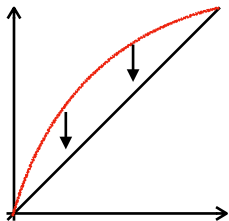
Hélène  
Eynard-  
Bontemps











- $(f, g) = (h^p, h^q)$ , **ok**.
- $(f, g) = (\phi_X^1, \phi_X^\alpha)$ ,  $X$  champ  $C^\infty$ , **ok**.

- $(f, g) = (h^p, h^q)$ , **ok**.
- $(f, g) = (\phi_X^1, \phi_X^\alpha)$ ,  $X$  champ  $C^\infty$ , **ok**.

(Szekeres, Kopell, Sergeraert) Si  $f$  et  $g$  sans point fixe intérieur, on est dans l'un de ces deux cas **mais avec  $X$  seulement  $C^1$  au bord** a priori.

- $(f, g) = (h^p, h^q)$ , **ok**.
- $(f, g) = (\phi_X^1, \phi_X^\alpha)$ ,  $X$  champ  $C^\infty$ , **ok**.

(Szekeres, Kopell, Sergeraert) Si  $f$  et  $g$  sans point fixe intérieur, on est dans l'un de ces deux cas **mais avec  $X$  seulement  $C^1$  au bord** a priori.

## Théorème (EB, 2024)

- Pour tout  $\alpha$  **de Liouville**, on peut construire un champ dont les temps  $t \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$  sont  $C^\infty$  mais d'autres non.
- Ceci n'est pas possible pour  $\alpha$  **diophantien**.

Inspiration : Sergeraert, Anosov-Katok, Herman, Yoccoz

- $(f, g) = (h^p, h^q)$ , **ok**.
- $(f, g) = (\phi_X^1, \phi_X^\alpha)$ ,  $X$  champ  $C^\infty$ , **ok**.

(Szekeres, Kopell, Sergeraert) Si  $f$  et  $g$  sans point fixe intérieur, on est dans l'un de ces deux cas **mais avec  $X$  seulement  $C^1$  au bord** a priori.

## Théorème (EB, 2024)

- Pour tout  $\alpha$  **de Liouville**, on peut construire un champ dont les temps  $t \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$  sont  $C^\infty$  mais d'autres non.
- Ceci n'est pas possible pour  $\alpha$  **diophantien**.

Inspiration : Sergeraert, Anosov-Katok, Herman, Yoccoz

Bonatti-EB :  $(f, g) = (\phi_X^1, \phi_X^\alpha)$  peut être  $C^\infty$ -approché par une paire plongée dans un flot lisse.

- $(f, g) = (h^p, h^q)$ , **ok**.
- $(f, g) = (\phi_X^1, \phi_X^\alpha)$ ,  $X$  champ  $C^\infty$ , **ok**.

(Szekeres, Kopell, Sergeraert) Si  $f$  et  $g$  sans point fixe intérieur, on est dans l'un de ces deux cas **mais avec  $X$  seulement  $C^1$  au bord** a priori.

## Théorème (EB, 2024)

- Pour tout  $\alpha$  **de Liouville**, on peut construire un champ dont les temps  $t \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$  sont  $C^\infty$  mais d'autres non.
- Ceci n'est pas possible pour  $\alpha$  **diophantien**.

Inspiration : Sergeraert, Anosov-Katok, Herman, Yoccoz

Bonatti-EB :  $(f, g) = (\phi_X^1, \phi_X^\alpha)$  peut être  $C^\infty$ -approché par une paire plongée dans un flot lisse.

Navas, EB-Navas : déformer  $(f, g)$  **par conjugaison** pour l'amener près de  $(\text{Id}, \text{Id})$ .