Université Pierre et Marie Curie, M1 Mathématiques, 2014-2015

Cours de géométrie différentielle 4M022 (H. Eynard-Bontemps, A. Oancea)

Examen final du 17 décembre 2014

Durée : 3 heures

Documents autorisés : notes de cours et TD, polycopié du cours.

Les exercices sont indépendants les uns des autres.

Exercice 1. Soit M une variété lisse et $f : M \to M$ un difféomorphisme. On considère le quotient M_f de $\mathbb{R} \times M$ par l'action de $\mathbb{Z}$ donnée par

$$\mathbb{Z} \times (\mathbb{R} \times M) \to \mathbb{R} \times M, \qquad (\ell, (t, x)) \mapsto (t + \ell, f^\ell(x)).$$

Dans cette notation f^{-1} désigne l'inverse de f et $f^0 = \mathrm{Id}_M$. On appelle M_f *suspension du difféomorphisme* f. On note $[t, x] \in M_f$ la classe d'équivalence d'un point $(t, x) \in \mathbb{R} \times M$.

I. Le cercle.

Soit $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le quotient de $\mathbb{R}$ par l'action de $\mathbb{Z}$ par translation $(\ell, t) \mapsto t+\ell$, $t \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{Z}$. On note $[t] \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la classe d'un élément $t \in \mathbb{R}$. On note $\pi : \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto [t]$ la projection.

(1) Expliquer comment S^1 peut être vu comme une suspension.

(2) Soit $\frac{\partial}{\partial t}$ la dérivation canonique associée à la coordonnée standard t sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\frac{\partial}{\partial t}$ est un champ invariant à gauche pour la structure de groupe de Lie sur $\mathbb{R}$ donnée par l'addition.

(3) Montrer qu'il existe un unique champ de vecteurs X sur S^1 tel que $d\pi(t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} = X([t])$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(4) Montrer que la 1-forme $\alpha \in \Omega^1(S^1)$ caractérisée par $\alpha(X) = 1$ vérifie $\pi^*\alpha = dt$.

(5) L'on oriente S^1 par X. Calculer $\int_{S^1} \alpha$.

(6) Que vaut $d\alpha$?

II. Suspensions.

(7) Montrer que M_f possède une unique structure de variété telle que la projection $\mathbb{R} \times M \to M_f$ soit un revêtement.

(8) Décrire la bande de Möbius comme une suspension. Connaissez-vous d'autres variétés de dimension 2 qui sont des suspensions ?

(9) On suppose que f admet un point fixe x_0. Montrer que l'application

$$\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times M, \qquad t \mapsto (t, x_0)$$

induit un plongement de S^1 dans M_f.

(10) Montrer que la projection $p : M_f \to S^1$, $[t, x] \mapsto [t]$ est une submersion lisse.

(11) Montrer que sur toute suspension M_f il existe un champ de vecteurs qui ne s'annule pas. *Indication : penser au cas du cercle.* En déduire que la sphère S^2 n'est pas difféomorphe à une suspension.

(12) Supposons que M est orientable et connexe. Montrer que M_f est orientable si et seulement si f préserve l'orientation.

(13) Construire à l'aide de la notion de suspension des exemples de variétés compactes non-orientables en toute dimension $\geqslant 2$.

Exercice 2. Considérons la forme différentielle suivante sur $\mathbb{R}^3$ muni des coordonnées (x, y, z) standard :

$$\alpha := dz - \frac{1}{2}(xdy - ydx) \in \Omega^1(\mathbb{R}^3).$$

I. Quelques calculs.

(1) Montrer que $d\alpha = -dx \wedge dy$ et calculer $\alpha \wedge d\alpha$.

(2) Montrer qu'il existe un unique champ de vecteurs R_α sur $\mathbb{R}^3$ tel que

$$d\alpha(R_\alpha, \cdot) = 0, \qquad \alpha(R_\alpha) = 1.$$

Écrivez l'expression de la courbe intégrale de R_α passant au temps $t = 0$ par un point $p \in \mathbb{R}$ quelconque.

(3) Calculer les dérivées de Lie $\mathcal{L}_{R_\alpha}\alpha$ et $\mathcal{L}_{R_\alpha}d\alpha$.

II. Surface tangente à ker α.

(4) Donner une base de ker $\alpha(p)$ en un point $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ quelconque. Montrer que, pour tout point $p \in \mathbb{R}^3$, la restriction de $d\alpha(p)$ à ker $\alpha(p)$ est une forme bilinéaire alternée non-nulle.

(5) Montrer qu'il n'existe pas de sous-variété M de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$ qui soit tangente en tout point à ker α, c'est-à-dire telle que $T_pM =$ ker $\alpha(p)$ pour tout $p \in M$. *Indication : raisonner par l'absurde et considérer la 2-forme $\iota^* d\alpha$, avec $\iota : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ l'inclusion.*

III. Courbe tangente à ker α.

(6) Soit

$$\theta := xdy - ydx \in \Omega^1(\mathbb{R}^2),$$

où $\mathbb{R}^2$ est muni des coordonnées (x, y) standard et de l'orientation standard. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine compact à bord lisse. Calculer l'intégrale de θ le long du bord orienté de D en fonction de la mesure de Lebesgue de D.

(7) Construire une courbe lisse $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ telle que $\gamma(0) = (1, 0, 0)$, $\gamma(1) = (1, 0, \pi)$ et $\dot{\gamma}(t) \in \ker \alpha(\gamma(t))$ pour tout $t \in [0, 1]$. *Indication : l'on pourra penser à la courbe* $\mathrm{pr} \circ \gamma$, *avec* $\mathrm{pr} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *la projection sur les deux premières coordonnées.*