Feuille 1 : Calcul différentiel et sous-variétés

Exercice 1. Soient n, m, k des entiers et $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ et $W \subset \mathbb{R}^k$ des ouverts.

1. Soit $f : U \to V$ et $g : V \to W$ des fonctions lisses. Donner la formule précise pour $d(g \circ f)$ et la prouver.
2. Que se passe-t-il lorsque $n = m = k = 1$? Dans le cas où n, m, k sont quelconques, réecrire la formule pour $d(g \circ f)$ en termes de dérivées partielles.
3. Supposons $n = 2$, $m = 1$, $k = 3$, $U = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = \sin(x + y^3)$ et $g(z) = (z, z^2, \cos(z))$. Calculer $d(g \circ f)$ de deux manières.
4. Supposons que $f : U \to V$ est un difféomorphisme. Vérifier que $n = m$ et calculer $d(f^{-1})$.

Exercice 2. Cet exercice récapitule quelques points autour des théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites.

1. Soit n un entier, $U, V \subset \mathbb{R}^n$ deux ouverts. Soit $f : U \to V$ une application lisse. Soit $x_0 \in U$. Supposons df_{x_0} inversible. Que garantit le théorème d'inversion locale ?
2. Supposons U connexe et df_{x_0} inversible pour tout $x_0 \in U$. Est-ce que f est un difféomorphisme sur son image? Est-ce que f est injective ? Si cela est faux, pouvez-vous donner un contre-exemple ?
3. Supposons U connexe, $n = 1$ et df_{x_0} inversible pour tout $x_0 \in U$. Montrer que f est un difféomorphisme sur son image.
4. Rappeler la démonstration du théorème d'inversion locale.
5. Supposons U connexe, df_{x_0} inversible pour tout $x_0 \in U$ et f bijective. Montrer que f est un difféomorphisme sur son image. Ce résultat s'appelle le théorème d'inversion globale.
6. Soit $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application lisse. Rappeler la définition de la différentielle partielle $D_y f$. Comment peut-on l'écrire explicitement comme matrice ? Que se passe-t-il lorsque $m = p = 1$?
7. Soit $(x_0, y_0) \in U$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et $(D_y f)_{(x_0,y_0)}$ est inversible. Que garantit le théorème des fonctions implicites ?
8. Démontrer le théorème des fonctions implicites à partir du théorème d'inversion locale.
9. Montrer inversement que le théorème des fonctions implicites implique le théorème d'inversion locale.

Exercice 3. Ouverts difféomorphes. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ donnés sont difféomorphes. Pour tout $p \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$, $B(p, r)$ désigne la boule euclidienne ouverte de $\mathbb{R}^n$ de centre p et de rayon r, et $\bar{B}(p, r)$ la boule fermée correspondante.

1. $B(0, 1)$ et $B(p, r)$;
2. $]-1, 1[^n$ et $\mathbb{R}^n$;
3. $B(0, 1)$ et $\mathbb{R}^n$;
4. $B(0, 1)$ et $]-1, 1[^n$;
5. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $B(0, 2) \setminus \bar{B}(0, 1)$;

6. $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ avec n, m deux entiers ;
7. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R}^n$;
8. $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ et $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (ici $n = 2$).

Exercice 4. Difféomorphismes et changements de coordonnées.

1. À tout point p de l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ du plan $\mathbb{R}^2$ on associe d'une part ses coordonnées cartésiennes (x, y) et d'autre part ses coordonnées polaires $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$. Exprimer les coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées polaires, et montrer que l'application ainsi obtenue définit un difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$.
2. À tout point p de $\mathbb{R}^n$ on associe d'une part ses coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ dans la base canonique, et d'autre part ses coordonnées $(y_1, ..., y_n)$ dans une autre base. Exprimer les secondes en fonction des premières à l'aide d'une matrice de passage, et montrer que l'application correspondante définit un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.

Exercice 5. La sphère comme sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner les valeurs critiques de la fonction $\|.\|^2 : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. En déduire que la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi : & U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z > 0\} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (x, y, \|(x, y, z)\|^2 - 1) \end{array}$$

   induit un difféomorphisme sur son image. Quelle est l'image par ϕ de $\mathbb{S}^2 \cap U$? À l'aide d'autres applications du même type, retrouver le résultat de la question précédente.
3. Retrouver encore une fois ce résultat à l'aide de l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \mapsto & (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}). \end{array}$$

   On utilisera une troisième définition des sous-variétés. Faire le lien entre les questions 1 et 3 et le théorème des fonctions implicites.

Exercice 6. Et si on enlève des hypothèses...

1. (Si on enlève "submersion"...) Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-variétés de $\mathbb{R}^3$: $\{(x,y,z)/x^2+y^2-z^2=0\}$? $\{(x,y,z)/x^2+y^2-z^2=1\}$?

2. (Si on enlève "immersion"...) Montrer que le graphe de $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$ n'est pas une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^2$.

3. (Si on enlève "homéomorphisme sur son image"...) Montrer que l'application $t \in \,]-\pi,\pi[\, \mapsto (\sin t, \sin t \cos t) \in \mathbb{R}^2$ est une immersion injective. Son image est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 7. Le tore de révolution. On appelle T la surface de révolution obtenue en faisant tourner autour de l'axe (Oz) le cercle $C_0 \subset \{y=0\}$ de centre $(2,0,0)$ et de rayon 1.

1. Trouver une équation de T de la forme $F(x,y,z)=0$. En déduire que T est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

2. Retrouver ce résultat à l'aide de l'application

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (\theta,\phi) & \mapsto & ((2+\cos\theta)\cos\phi, (2+\cos\theta)\sin\phi, \sin\theta). \end{array}$$

Exercice 8. Un "autre" tore.

1. Montrer que si M et N sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement, alors $M \times N$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{m+n}$ (naturellement identifié à $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$).

2. En déduire que $\mathbb{T}^n = (\mathbb{S}^1)^n$ est une sous-variété de $(\mathbb{R}^2)^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$. On verra dans un prochain exercice que $\mathbb{T}^2$ est difféomorphe au T de l'exercice précédent, au sens des variétés.

Exercice 9. Groupes classiques.

1. Montrer que l'application déterminant de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ est de classe C^1. On note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indices (i,j) qui vaut 1. Calculer la dérivée de l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto \det(I_n + tE_{i,j})$. En déduire la différentielle de det en l'identité, puis en toute matrice inversible. On l'exprimera à l'aide de la comatrice. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$ et en déduire la différentielle de det en tout point de $M_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / \det(M) = 1\}$ sont des sous-variétés de $M_n(\mathbb{R})$. Préciser leur dimension et expliciter leur plan tangent en I_n puis en tout point.

3. Montrer que l'application
$$\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & S_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tMM \end{array}$$
est une submersion en tout point de $GL_n(\mathbb{R})$. En déduire que $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ dont on précisera la dimension et le plan tangent en I_n.