Université Pierre et Marie Curie **2012-2013**
M1 – MM049

Transport de champ de vecteurs

Éléments de correction

Exercice 2.— Redressement global ?

1. X est défini sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et *borné* :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \|X(x,y)\| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1.$$

Il est donc complet (cf. T.D. “Solutions maximales, intervalle de vie”, exercice 7).

2. Le vecteur $X(x,y)$ est horizontal (resp. vertical) si et seulement si sa seconde (resp. première) coordonnée, $\sin(y)$ (resp. $\cos(y)$), est nulle, i.e. ssi $y \in \pi\mathbb{Z}$ (resp. $y \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$). L'ensemble des points où X est horizontal (resp. vertical) est donc la réunion des droites horizontales d'équation $y = k\pi$ (resp. $\frac{\pi}{2} + k\pi$), $k \in \mathbb{Z}$. On peut en outre distinguer, en observant le signe de $\cos(y)$ (resp. $\sin(y)$) les droites horizontales où X pointe vers la gauche de celles où il pointe vers la droite (resp. vers le haut / vers le bas).

Sur les droites horizontales d'équation $y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, le champ est constant égal au vecteur horizontal $(1,0)$. Le paramétrage $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto (t, 2k\pi)$ d'une telle droite est donc solution de l'équation :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \gamma'(t) = (1,0) = X(\gamma(t)).$$

De même, le paramétrage $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto (-t, (2k+1)\pi)$ de la droite d'équation $y = (2k+1)\pi$ est solution de l'équation.

3. Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ et $T_{\vec{u}}$ la translation associée. $T_{\vec{u}}^* X$ a une expression très simple :

$$\forall p \in \mathbb{R}, \quad T_{\vec{u}}^* X(p) \underset{\text{def}}{=} \underbrace{(DT_{\vec{u}}(T_{\vec{u}}(p)))}_{\text{id}}{}^{-1}.X(T_{\vec{u}}(p)) = X(p + \vec{u}).$$

Donc, si $\vec{u} = (a,b)$,

$$\begin{aligned} T_{\vec{u}} \text{ laisse } X \text{ invariant} &\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{R}^2,\ X(p+\vec{u}) = X(p) \\ &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ X(x+a, y+b) = X(x,y) \\ &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \sin(y+b) = \sin(y) \\ &\Leftrightarrow \vec{u} \text{ est de la forme } (a, 2k\pi), (a,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

4. N'importe quel segment vertical de longueur supérieure à π convient. Prenons par exemple le segment vertical d'extrémités $(0,0)$ et $(0,\pi)$. Notons le K. L'orbite du point $(0,0)$ par X est l'axe des abscisses tout entier (cf. **2.**), parcouru de gauche à droite. L'orbite du point $(0,\pi)$ par X est la droite horizontale d'équation $y = \pi$, parcourue de droite à gauche. Plus précisément (cf. **2.**), la solution de l'équation ayant pour condition initiale $(0,0)$ (resp. $(0,\pi)$) est $t \in \mathbb{R} \mapsto (t,0)$ (resp. $(-t,\pi)$). En d'autres termes, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi^t(0,0) = (t,0)$ et $\Phi^t(0,\pi) = (-t,\pi)$. Comme Φ^t est continu, $\Phi^t(K)$ est donc un arc joignant les points $(t,0)$ et $(-t,\pi)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, $\Phi^t(K)$ intersecte nécessairement l'axe des ordonnées $x = 0$. Notons en outre que l'orbite de tout point de K se trouve tout entière entre les droites horizontales $y = 0$ et $y = \pi$ puisque celles-ci sont des orbites et que deux orbites distinctes ne peuvent se croiser. $\Phi^t(K)$ intersecte donc l'axe des ordonnées en un point d'ordonnée comprise entre 0 et π, c'est-à-dire en un point de K ! On a donc bien $\Phi^t(K) \cap K \neq \varnothing$.

5. Le flot $(\Psi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ d'un tel champ constant est donné par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \Psi^t(x) = x + t\vec{u}.$$

6. Soit f un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Notons $(\Psi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ le flot de f^*X, de sorte que pour tout t, $\Phi^t = f \circ \Psi^t \circ f^{-1}$. Soit K le compact de la question **4.**, et $K' = f^{-1}(K)$. On a alors pour tout t

$$\Phi^t(K) \cap K \neq \varnothing \Rightarrow f^{-1}(\Phi^t(K) \cap K) = f^{-1}(\Phi^t(K)) \cap f^{-1}(K) \neq \varnothing, \text{i.e} \quad \Psi^t(K') \cap K' \neq \varnothing.$$

Le champ f^*X ne peut donc pas être un champ constant non nul, car d'après la question précédente, K' étant compact (donc borné), si tel était le cas, pour t assez grand, le translaté $\Psi^t(K')$ serait disjoint de K'.

Ainsi il n'existe pas de difféomorphisme f de $\mathbb{R}$ redressant X globalement.