

目 录

| | |
|------------------------------------|-----------|
| 前言 | vii |
| 记号 | xi |
| 第一部分 初等方法 | 1 |
| 第零章 实分析的一些技巧 | 1 |
| 0.1 Abel 求和法 | 1 |
| 0.2 Euler-Maclaurin 求和公式 | 3 |
| 习题 | 6 |
| 第一章 素数 | 9 |
| 1.1 概述 | 9 |
| 1.2 Tchébychev 估计 | 10 |
| 1.3 $n!$ 的 p 进赋值 | 12 |
| 1.4 Mertens 第一定理 | 13 |
| 1.5 两个新的渐近公式 | 14 |
| 1.6 Mertens 公式 | 15 |
| 1.7 Tchébychev 的另一定理 | 17 |
| 注记 | 18 |
| 习题 | 19 |
| 第二章 数论函数 | 24 |
| 2.1 定义 | 24 |
| 2.2 例子 | 24 |
| 2.3 形式 Dirichlet 级数 | 26 |
| 2.4 数论函数环 | 26 |
| 2.5 Möbius 反转公式 | 29 |
| 2.6 Mangoldt 函数 | 30 |
| 2.7 Euler 示性函数 | 32 |
| 注记 | 33 |
| 习题 | 34 |
| 第三章 均阶 | 36 |
| 3.1 概述 | 36 |
| 3.2 Dirichlet 问题和双曲律 | 36 |

| | | |
|------------------------------|--------------------------------------|------------|
| 3.3 | 因子和函数 | 38 |
| 3.4 | Euler 示性函数 | 39 |
| 3.5 | ω 函数和 Ω 函数 | 40 |
| 3.6 | Möbius 函数的均值与 Tchébychev 和函数 | 41 |
| 3.7 | 无平方因子整数 | 44 |
| 3.8 | 取值在 $[0, 1]$ 中的乘性函数之均阶 | 46 |
| | 注记 | 49 |
| | 习题 | 51 |
| 第四章 筛法 | | 57 |
| 4.1 | Ératosthène 筛法 | 57 |
| 4.2 | Brun 组合筛法 | 57 |
| 4.3 | 在孪生素数问题中的应用 | 60 |
| 4.4 | 大筛法的解析形式 | 62 |
| 4.5 | 大筛法的算术形式 | 67 |
| 4.6 | 大筛法的应用 | 70 |
| 4.7 | Selberg 筛法 | 72 |
| 4.8 | 区间中的平方和 | 83 |
| | 注记 | 87 |
| | 习题 | 91 |
| 第五章 极阶 | | 96 |
| 5.1 | 简介和定义 | 96 |
| 5.2 | 函数 $\tau(n)$ | 96 |
| 5.3 | 函数 $\omega(n)$ 和 $\Omega(n)$ | 98 |
| 5.4 | Euler 函数 $\varphi(n)$ | 99 |
| 5.5 | 函数 $\sigma_\kappa(n)$, $\kappa > 0$ | 100 |
| | 注记 | 102 |
| | 习题 | 103 |
| 第六章 van der Corput 方法 | | 106 |
| 6.1 | 简介和回顾 | 106 |
| 6.2 | 三角积分 | 107 |
| 6.3 | 三角和 | 108 |
| 6.4 | 在 Voronoï 定理中的应用 | 113 |
| 6.5 | 模 1 均匀分布 | 115 |
| | 注记 | 118 |
| | 习题 | 120 |

| | |
|------------------------------------------|------------|
| 目 录 | iii |
| 第七章 Diophantus 逼近 | 125 |
| 7.1 从 Dirichlet 到 Roth | 125 |
| 7.2 最优逼近, 连分数 | 127 |
| 7.3 连分数展开的性质 | 132 |
| 7.4 二次无理数的连分数展开 | 135 |
| 注记 | 138 |
| 习题 | 139 |
| | |
| 第二部分 解析方法 | 146 |
| 第零章 Euler Γ-函数 | 147 |
| 0.1 定义 | 147 |
| 0.2 Weierstrass 乘积公式 | 149 |
| 0.3 β -函数 | 150 |
| 0.4 复 Stirling 公式 | 152 |
| 0.5 Hankel 公式 | 156 |
| 习题 | 158 |
| | |
| 第一章 生成函数: Dirichlet 级数 | 162 |
| 1.1 收敛的 Dirichlet 级数 | 162 |
| 1.2 乘性函数的 Dirichlet 级数 | 163 |
| 1.3 Dirichlet 级数的基本解析性质 | 164 |
| 1.4 收敛坐标与均值 | 169 |
| 1.5 一个算术应用: 整数的核 | 171 |
| 1.6 竖带域中阶的估计 | 173 |
| 注记 | 177 |
| 习题 | 182 |
| | |
| 第二章 求和公式 | 187 |
| 2.1 Perron 公式 | 187 |
| 2.2 应用: 两个收敛定理 | 192 |
| 2.3 均值定理 | 194 |
| 注记 | 196 |
| 习题 | 197 |
| | |
| 第三章 Riemann ζ-函数 | 199 |
| 3.1 简介 | 199 |
| 3.2 解析延拓 | 199 |
| 3.3 函数方程 | 201 |

| | | |
|------------|-------------------------------------------------|------------|
| 3.4 | 临界带域中的逼近和上界估计 | 202 |
| 3.5 | 零点分布的初步估计 | 205 |
| 3.6 | 几个复分析中的引理 | 207 |
| 3.7 | 零点的整体分布 | 209 |
| 3.8 | Hadamard 乘积展开 | 211 |
| 3.9 | 无零点区域 | 213 |
| 3.10 | ζ'/ζ , $1/\zeta$ 和 $\log \zeta$ 的上界估计 | 214 |
| | 注记 | 217 |
| | 习题 | 219 |
| 第四章 | 素数定理和 Riemann 假设 | 226 |
| 4.1 | 素数定理 | 226 |
| 4.2 | 最弱的假设 | 227 |
| 4.3 | Riemann 假设 | 229 |
| 4.4 | $\psi(x)$ 的显式公式 | 232 |
| | 注记 | 236 |
| | 习题 | 239 |
| 第五章 | Selberg-Delange 方法 | 241 |
| 5.1 | $\zeta(s)$ 的复次幂 | 241 |
| 5.2 | 主要结论 | 243 |
| 5.3 | 定理 5.2 的证明 | 245 |
| 5.4 | 主要定理的一个变体 | 249 |
| | 注记 | 253 |
| | 习题 | 255 |
| 第六章 | 两个算术上的应用 | 261 |
| 6.1 | 素因子个数为 k 的整数 | 261 |
| 6.2 | 因子的平均分布: 反正弦分布 | 267 |
| | 注记 | 272 |
| | 习题 | 274 |
| 第七章 | Tauber 型定理 | 277 |
| 7.1 | 简介, Tauber 型与 Abel 型定理的对偶性 | 277 |
| 7.2 | Tauber 定理 | 279 |
| 7.3 | Hardy-Littlewood 和 Karamata 定理 | 281 |
| 7.4 | Karamata 定理的余项 | 286 |
| 7.5 | Ikehara 定理 | 293 |
| 7.6 | Berry-Esseen 不等式 | 298 |
| 7.7 | 全纯性作为 Tauber 型条件 | 300 |

| | |
|-------------------------------------------------------------------|------------|
| 7.8 算术 Tauber 型定理 | 303 |
| 注记 | 307 |
| 习题 | 312 |
| 第八章 算术数列中的素数分布 | 316 |
| 8.1 简介, Dirichlet 特征 | 316 |
| 8.2 L 级数. 算术数列的素数定理 | 325 |
| 8.3 $\sigma \geq 1$ 时 $ L(s, \chi) $ 的下界估计, 定理 8.16 的证明 | 331 |
| 8.4 $L(s, \chi)$ 的函数方程 | 337 |
| 8.5 Hadamard 乘积公式及无零点区域 | 339 |
| 8.6 $\psi(x; \chi)$ 的显式公式 | 343 |
| 8.7 算术数列的素数定理 | 348 |
| 注记 | 353 |
| 习题 | 355 |
| | |
| 第三部分 概率方法 | 361 |
| | |
| 第一章 密率 | 362 |
| 1.1 定义, 自然密率 | 362 |
| 1.2 对数密率 | 364 |
| 1.3 解析密率 | 365 |
| 1.4 概率数论 | 367 |
| 注记 | 368 |
| 习题 | 369 |
| | |
| 第二章 数论函数的分布律 | 373 |
| 2.1 定义, 分布函数 | 373 |
| 2.2 特征函数 | 376 |
| 注记 | 379 |
| 习题 | 385 |
| | |
| 第三章 正规阶 | 389 |
| 3.1 定义 | 389 |
| 3.2 Turán-Kubilius 不等式 | 389 |
| 3.3 Turán-Kubilius 不等式的对偶形式 | 395 |
| 3.4 Hardy-Ramanujan 定理及其它应用 | 396 |
| 3.5 乘性函数的实效估计 | 398 |
| 3.6 整数素因子列的正规结构 | 401 |
| 注记 | 403 |

| | |
|------------------------------|------------|
| 习题 | 408 |
| 第四章 加性函数的分布和乘性函数的均值 | 414 |
| 4.1 Erdős–Wintner 定理 | 414 |
| 4.2 Delange 定理 | 419 |
| 4.3 Halász 定理 | 422 |
| 4.4 Erdős–Kac 定理 | 434 |
| 注记 | 437 |
| 习题 | 440 |
| 第五章 脆数和鞍点法 | 444 |
| 5.1 简介, Rankin 方法 | 444 |
| 5.2 几何方法 | 448 |
| 5.3 函数方程 | 449 |
| 5.4 Dickman 函数 | 454 |
| 5.5 用鞍点法逼近 $\Psi(x, y)$ | 460 |
| 5.6 Jacobsthal 函数和 Rankin 定理 | 469 |
| 注记 | 472 |
| 习题 | 479 |
| 第六章 无小因子整数 | 483 |
| 6.1 简介 | 483 |
| 6.2 函数方程 | 485 |
| 6.3 Buchstab 函数 | 489 |
| 6.4 用鞍点法估计 $\Phi(x, y)$ | 493 |
| 6.5 Kubilius 模型 | 502 |
| 注记 | 506 |
| 习题 | 510 |
| 参考文献 | 513 |
| 索 引 | 547 |