Université Joseph Fourier
MAT112-INT
2012-2013

Contrôle de connaissance
du lundi 19 novembre 2012
Les exercices sont indépendents

Exercice 1 Soit z le nombre complexe i^{2013} (Let z be the complex number i^{2013}).

(1) Déterminer l'argument de z (Determine the argument of z).

(2) Déterminer l'ensemble des nombres complexes w tels que $w^3 = z$ (Determine the set of all complex numbers w such that $w^3 = z$).

Exercice 2 Soient $z = 1+\sqrt{3}\,i$ et $w = 2+2i$ deux nombres complexes (Let $z = 1+\sqrt{3}\,i$ and $w = 2+2i$ be two complex numbers).

(1) Exprimer le nombre complexe z/w sous forme algébrique (Express the complex number z/w in the algebraic form).

(2) Déterminer la valeur de $\cos(\pi/12)$ (Determine the value of $\cos(\pi/12)$).

(3) Déterminer la valeur de $\cos(7\pi/12)$ (Determine the value of $\cos(7\pi/12)$).

Exercice 3 Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tels que $z + z^{-1} = 2\cos\theta$ (Let $\theta \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ be such that $z + z^{-1} = 2\cos\theta$). Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $z^n + z^{-n} = 2\cos(n\theta)$ (Prove that for any $n \in \mathbb{N}$ one has $z^n + z^{-n} = 2\cos(n\theta)$).

Exercice 4 Soient α et β deux nombres complexes tels que les racines de l'équation $z^2 + \alpha z + \beta = 0$ sont réelles (Let α and β be two complex numbers such that the solutions to the equation $z^2 + \alpha z + \beta = 0$ are real). Montrer que α et β sont des nombres réels (Prove that α and β are real numbers).

Exercice 5 Soient θ un nombre réel, $z = \mathrm{e}^{2\pi i\theta}$, n un entier ≥ 1 et $w = z + z^2 + \cdots + z^n$ (Let θ be a real number, $z = \mathrm{e}^{2\pi i\theta}$, $n \geq 1$ be an integer and $w = z + z^2 + \cdots + z^n$).

(1) Déterminer la valeur absolue de $1 - z$ (Determine the absolute value of $1 - z$).

(2) Supposons que $\sin(\pi\theta) \neq 0$ (Suppose that $\sin(\pi\theta) \neq 0$). Montrer que $|w| \leq 1/|\sin(\pi\theta)|$ (Prove that $|w| \leq 1/|\sin(\pi\theta)|$).

Exercice 6 Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $|z_1| = |z_2| = 1$ et que $z_1+z_2 = (3/5)+(4/5)i$. (Let z_1 and z_2 be two complex numbers such that $|z_1| = |z_2| = 1$ and $z_1 + z_2 = (3/5) + (4/5)i$). Montrer que (Prove that)

$$z_1^2 + z_2^2 = -z_1 z_2.$$