Université Joseph Fourier
L2 MAT233
2012-2013

Contrôle de connaissance du 11 janvier 2013

Tout document et tout appareil électronique sont interdits. Les deux parties sont indépendantes. Vous pouvez utiliser sans démonstration les résultats du cours figurant dans l'appendice en indiquant le numéro du résultat que vous utilisez.

Première partie

Dans cette partie, on considère l'équation différentielle suivante :

$$x''(t) + e^t x(t) = 0. \tag{1}$$

On désigne par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de cette équation.

1. Transformer l'équation (1) en une équation différentielle d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^2$.
Réponse : On pose $y(t) = x'(t)$. L'équation (1) peut s'écrire comme $y'(t)+e^t x(t) = 0$. D'où le vecteur de fonctions $(x(t), y(t))$ vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -e^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

2. Montrer que, s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) = f'(t_0) = 0$, alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Énoncer le résultat du cours que vous utilisez.
Réponse : Il s'avère que (f, f') est une solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 obtenue dans la question précédente. D'après le résultat (6) de l'appendice (ou le théorème 13.6 du cours), on obtient que $f(t) = f'(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ dès que $f(t_0) = f'(t_0) = 0$ car l'application de l'ensemble des solutions de cette équation différentielle vers $\mathbb{R}^2$ qui envoie toute solution $(x(t), y(t))$ $(t \in \mathbb{R})$ en $(x(t_0), y(t_0))$ est une bijection linéaire.

3. Montrer que, si f n'est pas identiquement nulle, alors pour tout point de zéro t de la fonction f (c'est-à-dire que $f(t) = 0$), il existe $\varepsilon > 0$ tel que la fonction f ne s'annule pas dans l'intervalle ouvert $]t, t + \varepsilon[$.
Réponse : On raisonne par l'absurde. Si la fonction f s'annule en tout intervalle de la forme $]t, t + \varepsilon[$, on peut alors construire une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de points de zéros de f telle que $a_n > t$ pour tout n et que $\lim_{n\to+\infty} a_n = t$. On obtient alors

$$f'(t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(a_n) - f(t)}{a_n - t} = 0$$

On en déduire que f est identiquement nulle (d'après la question précédente). Cela est absurde.

Dans la suite, on fixe deux nombres réels α et β tels que $\alpha < \beta$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentelle suivante

$$x''(t) + e^\alpha x(t) = 0. \tag{2}$$

On suppose que la fonction g s'annule en les points α et β, et est strictement positive sur l'intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$. On définit le wronskien de f et g comme

$$W(t) = \text{dét} \begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

4. Montrer que $g'(\alpha) \geqslant 0$ et $g'(\beta) \leqslant 0$.
Réponse : Comme g est strictement positive sur $]\alpha, \beta[$ et est nulle en α et β, on a

$$g'(\alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{g(\alpha+\varepsilon) - g(\alpha)}{\varepsilon} \geqslant 0, \quad g'(\beta) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{g(\beta-\varepsilon) - g(\beta)}{-\varepsilon} \leqslant 0.$$

5. Montrer que la fonction f ne peut pas être strictement positive en tout point de l'intervalle $]\alpha, \beta[$. On peut étudier les variations de la fonction W.
Réponse : On a $W(t) = f(t)g'(t) - g(t)f'(t)$, d'où

$$W'(t) = f(t)g''(t) - g(t)f''(t) = -f(t)e^{\alpha}g(t) + g(t)e^{t}f(t) = f(t)g(t)(e^{t} - e^{\alpha}),$$

où la deuxième égalité provient des équations différentielles (1) et (2). Si la fonction f est strictement positive sur $]\alpha, \beta[$, alors W' est strictement positive sur $]\alpha, \beta[$ et donc W est strictement croissante sur $[\alpha, \beta]$. En particulier, on a $W(\beta) > W(\alpha)$. Cependant, on a $W(\beta) = f(\beta)g'(\beta) \leqslant 0$ tandis que $W(\alpha) = f(\alpha)g'(\alpha) \geqslant 0$ (par la continuité de f et la positivité de f sur $]\alpha, \beta[$, on a $f(\alpha) \geqslant 0$ et $f(\beta) \geqslant 0$). Cela est absurde.

6. Montrer que la fonction f ne peut pas être strictement négative en tout point de l'intervalle $]\alpha, \beta[$.
Réponse : Si f est strictement négative sur $]\alpha, \beta[$ alors la fonction W est strictement décroissante sur $]\alpha, \beta[$. Cependant, on a $W(\alpha) = f(\alpha)g'(\alpha) \leqslant 0$ et $W(\beta) = f(\beta)g'(\beta) \geqslant 0$. Cela est absurde.

7. En déduire que, entre deux points de zéro consécutifs de la fonction g on trouve au moins un point de zéro de la fonction f.
Réponse : Entre deux points de zéro consécutifs $\alpha < \beta$, la fonction g ne change pas de signe (puisqu'elle est continue). Elle est donc ou bien strictement positive ou bien strictement négative. Comme les fonctions g et $-g$ sont toutes les deux des solutions de l'équation (2), on peut suppose g strictement positive sur $]\alpha, \beta[$ (quitte à remplacer éventuellement g par $-g$). Comme la fonction f est continue, si f n'est pas de point de zéro dans $]\alpha, \beta[$, alors elle est ou bien strictement positive ou bien strictement négative sur $]\alpha, \beta[$ (théorème des valeurs intermédiaires). Cela n'est pas possible compte tenu des deux questions précédentes.

8. Montre que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, la fonction $\varphi_{s,\alpha}(t) = \sin(s + e^{\alpha/2}t)$ est une solution de l'équation (2).
Réponse : On vérifie que

$$\varphi'_{s,\alpha}(t) = e^{\alpha/2}\cos(s + e^{\alpha/2}t) \text{ et } \varphi''_{s,\alpha}(t) = -e^{\alpha}\sin(s + e^{\alpha/2}t) = -e^{\alpha}\varphi_{s,\alpha}(t).$$

Donc $\varphi_{s,\alpha}$ est une solution de l'équation (2).

9. En déduire que, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, la fonction f admet au moins un point de zéro dans l'intervalle $]\tau, \tau + \pi e^{-\tau/2}[$.

Réponse : Considérons la fonction $\varphi_{s,\tau}(t)$ avec $s = -e^{\tau/2}\tau$. C'est une solution de l'équation (2) avec $\alpha = \tau$. Les points τ et $\tau + \pi e^{-\tau/2}$ sont deux points de zéro consécutifs de la fonction $\varphi_{s,\tau}$. On en déduit que la fonction f admet au moins un point de zéro dans $]\tau, \tau + \pi e^{-\tau/2}[$, d'après la question **7.**.

10. On suppose que f n'est pas identiquement nulle. Montrer que, si $\alpha < \beta$ sont deux points de zéros consécutifs de f, alors on a

$$\pi e^{-\beta/2} \leqslant \beta - \alpha \leqslant \pi e^{-\alpha/2}.$$

Pour la deuxième inégalité, on peut utiliser le résultat de la question précédente ; pour la première inégalité, on peut étudier l'équation différentielle $x''(t)+e^{\beta}x(t) = 0$.
Réponse : D'après la question précédente, dans l'intervalle $]\alpha, \alpha + \pi e^{-\alpha/2}[$ il y a un point de zéro de la fonction f. Donc $\beta < \alpha + \pi e^{-\alpha/2}$ et $\beta - \alpha < \pi e^{-\alpha/2}$, d'où la deuxième inégalité.
Pour montrer la première inégalité, on considère une solution h de l'équation $x''(t)+e^{\beta}x(t) = 0$ qui s'annule en β et $\beta - \pi e^{-\beta/2}$ et est strictement positive sur l'intervalle ouvert $I =]\beta - \pi e^{-\beta/2}, \beta[$. On peut prendre $h(t) = -\sin(e^{\beta/2}t - e^{\beta/2}\beta)$. Le wronskien de f et h s'écrit comme

$$U(t) = f(t)h'(t) - f'(t)h(t),$$

d'où $U'(t) = f(t)h(t)(e^t - e^{\beta})$. Si la fonction f est strictement positive sur l'intervalle I, alors la fonction U est strcitement décroissante sur l'intervalle fermée $\overline{I}$ (car $U'(t) < 0$ sur I) ; tandis que $U(\beta - \pi e^{-\beta/2}) \geqslant 0 \geqslant U(\beta)$. Donc f ne peut pas être strictement positive sur I. Par un argument similaire, on montre que f ne peut pas être strictement négative sur I. On en déduit que la fonction f possède au moins un point de zéro dans l'intervalle I, d'où $\beta - \pi e^{-\beta/2} < \alpha$ et $\beta - \alpha < \pi e^{-\beta/2}$.

Deuxième partie

Pour toute fonction f à valeurs réelles de classe C^2 définie sur un ouvert U du plan $\mathbb{R}^2$, on désigne par Δf le *laplacien* de f, défini comme :

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

On dit que la fonction f est *harmonique* si $\Delta f = 0$. Dans cette partie, on munit le plan $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne usuelle $\|.\|$. On a

$$\|(x,y)\| := \sqrt{x^2+y^2}$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

11. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to]0, +\infty[$ la fonction définie comme $\varphi(x,y) = \|(x,y)\|$. Montrer que $\partial\varphi/\partial x = x/\varphi$ et $\partial\varphi/\partial y = y/\varphi$.
Réponse : On a $\varphi^2 = x^2 + y^2$. Si on dérive les deux côté par rapport à x, on obtient

$$2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x,$$

d'où $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x/\varphi$. La démonstration de l'autre égalité est similaire.

12. Montrer que $\log\circ\varphi$ est une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Réponse : On a (d'après la question précédente)

$$\frac{\partial(\log\circ\varphi)}{\partial x} = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{x}{\varphi^2}$$

et donc

$$\frac{\partial^2(\log\circ\varphi)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{\varphi^2}\Big) = \frac{1}{\varphi^2} + x\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{\varphi^2}\Big) = \frac{1}{\varphi^2} - \frac{2x}{\varphi^3}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{\varphi^2} - \frac{2x^2}{\varphi^4}.$$

De façon similaire, on a

$$\frac{\partial^2(\log\circ\varphi)}{\partial y^2} = \frac{1}{\varphi^2} - \frac{2y^2}{\varphi^4}.$$

Donc

$$\Delta(\log\circ\varphi) = \frac{2}{\varphi^2} - \frac{2x^2+2y^2}{\varphi^4} = \frac{2}{\varphi^2} - \frac{2\varphi^2}{\varphi^4} = 0.$$

13. Déterminer toutes les fonctions harmoniques sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ qui sont de la forme $u\circ\varphi$, où u est une fonction de classe C^2 sur $]0,+\infty[$. On peut déterminer une équation différentielle que la fonction u doit satisfaire.
Réponse : Si u est une fonction de classe C^2 sur $]0,+\infty[$, on a

$$\frac{\partial(u\circ\varphi)}{\partial x} = (u'\circ\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x} = (u'\circ\varphi)\frac{x}{\varphi},$$

et

$$\frac{\partial^2(u\circ\varphi)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big((u'\circ\varphi)\frac{x}{\varphi}\Big) = (u''\circ\varphi)\Big(\frac{x}{\varphi}\Big)^2 + (u'\circ\varphi)\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{\varphi}\Big).$$

Comme

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{\varphi}\Big) = \frac{1}{\varphi} + x\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{\varphi}\Big) = \frac{1}{\varphi} - \frac{x^2}{\varphi^2},$$

on obtient

$$\frac{\partial^2(u\circ\varphi)}{\partial x^2} = (u''\circ\varphi)\frac{x^2}{\varphi^2} + (u'\circ\varphi)\Big(\frac{1}{\varphi} - \frac{x^2}{\varphi^2}\Big).$$

De même (par la symétrie entre x et y), on a

$$\frac{\partial^2(u\circ\varphi)}{\partial y^2} = (u''\circ\varphi)\frac{y^2}{\varphi^2} + (u'\circ\varphi)\Big(\frac{1}{\varphi} - \frac{y^2}{\varphi^2}\Big).$$

D'où

$$\Delta(u\circ\varphi) = (u''\circ\varphi) + (u'\circ\varphi)\Big(\frac{2}{\varphi} - 1\Big).$$

On en déduit que, pour que la fonction $u\circ\varphi$ soit harmonique (i.e. $\Delta(u\circ\varphi) = 0$), il faut et il suffit que la fonction u vérifie l'équation différentielle

$$u''(t) = \Big(1 - \frac{2}{t}\Big)u'(t), \quad t \in]0,+\infty[$$

ou encore (u, u') est une solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 2/t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

En particulier, l'espace des solutions de cette équation est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$ (d'après le résultat (6) de l'appendice (ou le théorème 13.6 du cours)). On a déjà vu dans la question précédente que la fonction log est une solution. En outre, la fonction constante $u(t) \equiv 1$ est évidemment une solution. Ces deux solutions ne sont pas proportionnelles et donc forment une base de l'espace des solutions. Donc toute fonction u de classe C^2 telle que $u \circ \varphi$ soit harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est de la forme $u(t) = a\log(t) + b$, où a et b sont deux constantes réelles.

Dans la suite, on fixe une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ qui est harmonique. Pour tout $\varepsilon > 0$, on désigne par $f_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction qui envoie (x, y) en $f(x, y) + \varepsilon(x^2 + y^2)$. Pour tout $r > 0$, soient

$$D_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|(x, y)\| \leqslant r\} \quad \text{et} \quad C_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|(x, y)\| = r\}.$$

On désigne par $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée telle que $\gamma_r(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$.

14. Montrer que la restriction de f_ε à D_r atteint son maximum en un point $\theta_{\varepsilon,r}$.
Réponse : Le domaine D_r est borné et fermé. Il est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^2$. Donc la restriction de la fonction f_ε à D_r atteint son maximum, compte tenu du résultat (2) de l'appendice.

15. Montrer que, si $\theta_{\varepsilon,r} \notin C_r$, alors on a simultanément

$$\frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial x^2}(\theta_{\varepsilon,r}) \leqslant 0, \qquad \frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial y^2}(\theta_{\varepsilon,r}) \leqslant 0.$$

En déduire que $\theta_{\varepsilon,r}$ appartient nécessairement à C_r. On peut calculer le laplacien de la fonction f_ε.
Réponse : Supposons que $\theta_{\varepsilon,r}$ n'appartient pas à C_r. Il est alors dans l'intérieure du domaine D_r. Soient x_0 et y_0 les deux coordonnées de $\theta_{\varepsilon,r}$. La formule de Taylor d'ordre 2 (en dimension 1) montre que

$$f_\varepsilon(x, y_0) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

Comme (x_0, y_0) est un maximum local de f_ε, on a $Df_\varepsilon(x_0, y_0) = 0$. En particulier, on a $\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$. On en déduit donc

$$\frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial x^2}(x_0, y_0) = 2 \lim_{x \to x_0} \frac{f_\varepsilon(x, y_0) - f_\varepsilon(x_0, y_0)}{(x - x_0)^2} \leqslant 0.$$

De façon similaire (ou par la symétrie entre les deux coordonnées), on a $\frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial y^2}(\theta_{\varepsilon,r}) \leqslant 0$. Par conséquent, on a $\Delta(f_\varepsilon)(\theta_{\varepsilon,r}) \leqslant 0$. Cependant, un calcul direct montre que

$$\Delta(f_\varepsilon) = \Delta(f) + \varepsilon\Delta(x^2 + y^2) = 4\varepsilon > 0,$$

cela est absurde. On obtient donc $\theta_{\varepsilon,r} \in C_r$.

16. Montrer que la restriction de la fonction f à D_r atteint son maximum en un point de C_r. En déduire que, si deux fonctions harmoniques sur $\mathbb{R}$ sont égales le long du cercle C_r, alors elle sont égales dans le disque D_r.

Réponse : Soit $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres strictement positifs qui converge vers 0. La suite de points $(\theta_{\varepsilon_n,r})_{n\geqslant 0}$ est contenue dans le domaine compact C_r. On peut donc en soustraire une sous-suite qui converge dans C_r. Quitte à remplacer $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ par une sous-suite, on peut supposer que la suite $(\theta_{\varepsilon_n,r})_{n\geqslant 0}$ converge dans C_r vers un point θ. Montrons que θ est un point maximum de la restrcition de f à D_r. En effet, pour tout $\xi \in D_r$, on a $f_{\varepsilon_n}(\xi) \leqslant f_{\varepsilon_n}(\theta_{\varepsilon_n,r})$, ou de façon équivalente

$$f(\xi) + \varepsilon_n\|\xi\|^2 \leqslant f(\theta_{\varepsilon_n,r}) + \varepsilon_n r^2.$$

Par passage à la limite quand n tend vers l'infini (ici on utilise la continuité de la fonction f), on obtient $f(\xi) \leqslant f(\theta)$. Donc θ est un point maximum de la restriction de f à D_r.

Si f est g sont deux fonctions harmoniques qui sont égales le long de C_r, alors $f-g$ est une fonction harmonique qui s'annule sur C_r. On en déduit que $f-g \leqslant 0$ sur D_r puisque la fonction $f-g$ atteint son maximum en un point de C_r. De même on a $g-f \leqslant 0$ sur D_r car $g-f$ est aussi une fonction harmonique qui s'annule sur C_r. On en déduit donc $f-g=0$ sur D_r.

17. On définit une fonction F sur $[0,+\infty[$ comme

$$F(r) = \int_0^{2\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que cette fonction est bien définie et est continue sur $[0,+\infty[$.

Réponse : Les fonctions f, sin et cos étant continues, on obtient que la fonction composée $t \mapsto f(r\cos(t), r\sin(t))$ est continue, donc est intégrable sur tout intervalle compact. La fonction F est donc bien définie. Montrons sa continuité sur $[0,+\infty[$. Fixons un nombre réel $M>0$. Soient $r_0 \leqslant r_1$ deux points de $[0,M]$, on a

$$\begin{aligned}
|F(r_1)-F(r_0)| &= \left|\int_0^{2\pi} f(r_1\cos t, r_1\sin t) - f(r_0\cos t, r_0\sin t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_0^{2\pi} |f(r_1\cos t, r_1\sin t) - f(r_0\cos t, r_0\sin t)|\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

La fonction composée $\eta : (r,t) \to f(r\cos t, r\sin t)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et on a

$$\frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t)\cos t + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)\sin t.$$

D'après le théorème d'accroissements finis, on obtient

$$\begin{aligned}
|\eta(r_1,t)-\eta(r_0,t)| &\leqslant (r_1-r_0)\sup_{r_0<r<r_1}\Big(\Big|\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t)\Big| + \Big|\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)\Big|\Big) \\
&\leqslant (r_1-r_0)\sup_{(r,t)\in[0,M]\times[0,2\pi]}\Big(\Big|\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t)\Big| + \Big|\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)\Big|\Big),
\end{aligned}$$

pourvu que $t \in [0, 2\pi]$. On désigne par α_M cette dernière borne supérieure. Comme le domaine $[0, M] \times [0, 2\pi]$ est compact et comme les fonctions composées $(r, t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t)$ et $(r, t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t)$ sont continues, on obtient $\alpha_M < +\infty$. On a alors

$$|F(r_1) - F(r_0)| \leqslant \alpha_M(r_1 - r_0),$$

qui implique que la fonction F est continue sur $[0, M]$. Comme M est arbitraire, on obtient que la fonction F est continue sur $[0, +\infty[$.

18. Montre que, si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1, alors on a

$$\int_0^{2\pi} h(\gamma_r(t))\sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{r}\int_{D_r} \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}(x, y),$$
$$\int_0^{2\pi} h(\gamma_r(t))\cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{r}\int_{D_r} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y)\,\mathrm{d}(x, y).$$

On peut par exemple transformer l'intégrale double en des intégrales successives.
Réponse : D'après le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{D_r} \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \int_{-r}^{r}\left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-r}^{r} h(x, \sqrt{r^2 - x^2})\,\mathrm{d}x - \int_{-r}^{r} h(x, -\sqrt{r^2 - x^2})\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-r}^{0} h(x, \sqrt{r^2 - x^2})\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{r} h(x, \sqrt{r^2 - x^2})\,\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_{-r}^{0} h(x, -\sqrt{r^2 - x^2})\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{r} h(x, -\sqrt{r^2 - x^2})\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On effectue un changement de variable commun $x = r\cos t$ pour ces intégrales mais avec différents domaines de t : $t \in [\pi/2, \pi]$, $t \in [0, \pi/2]$, $t \in [\pi, 3\pi/2]$, $t \in [3\pi/2, 2\pi]$ respectivement, et obtient

$$\begin{aligned}
\int_{D_r} \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) &= r\int_{\pi/2}^{\pi} h(r\cos t, r\sin t)\sin(t)\,\mathrm{d}t + r\int_{0}^{\pi/2} h(r\cos t, r\sin t)\sin(t)\,\mathrm{d}t \\
&\quad + r\int_{\pi}^{3\pi/2} h(r\cos t, r\sin t)\sin(t)\,\mathrm{d}t + r\int_{3\pi/2}^{2\pi} h(r\cos t, r\sin t)\sin(t)\,\mathrm{d}t \\
&= r\int_{0}^{2\pi} h(r\cos t, r\sin t)\sin(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

La deuxième égalité se démontre de façon très similaire. On a

$$\begin{aligned}
&\int_{D_r} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \int_{-r}^{r} \Big(\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x \Big)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-r}^{r} h(\sqrt{r^2-y^2},y)\,\mathrm{d}y - \int_{-r}^{r} h(-\sqrt{r^2-y^2},y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-r}^{0} h(\sqrt{r^2-y^2},y)\,\mathrm{d}y + \int_{0}^{r} h(\sqrt{r^2-y^2},y)\,\mathrm{d}y \\
&\quad - \int_{-r}^{0} h(-\sqrt{r^2-y^2},y)\,\mathrm{d}y - \int_{0}^{r} h(-\sqrt{r^2-y^2},y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Quitte à faire le changement de variable $y = r\sin t$ pour $t \in [3\pi/2, 2\pi]$, $t \in [0, 2\pi]$, $t \in [\pi, 3\pi/2]$ et $t \in [\pi/2, \pi]$, on obtient le résultat.

19. Montrer que la restrcition de F à $]0, +\infty[$ est dérivable et montrer que sa dérivée est égale à 0. On peut appliquer les résultats obtenu dans la question **18**.

Réponse : Pour cela il suffit de justifier que $F(r_0) = F(r_1)$ pour tous nombres réels $r_0 \leqslant r_1$. On a (la fonction η était introduite dans la réponse à la question **17.**)

$$\begin{aligned}
F(r_1) - F(r_0) &= \int_0^{2\pi} f(r_1\cos t, r_1\sin t) - f(r_0\cos t, r_0 \sin t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\int_{r_0}^{r_1} \frac{\partial \eta}{\partial r}(r,t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{r_0}^{r_1} \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t)\cos(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)\sin(t) \Big)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{r_0}^{r_1}\int_0^{2\pi} \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t)\cos(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)\sin(t) \Big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r \\
&= \int_{r_0}^{r_1}\int_{D_r} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \Big)\,\mathrm{d}(x,y)\,\mathrm{d}r,
\end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de la question précédente. Comme f est harmonique, on a $\Delta(f) = 0$. On a donc $F(r_1) = F(r_0)$.

20. Montrer que la fonction f est intégrable sur le disque D_r et on a

$$\int_{D_r} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \pi r^2 f(0,0).$$

Réponse : La fonction f est continue, donc est intégrable sur tout domaine compact. En particulier, elle est intégrable sur D_r. Par le changement de variable $(x,y) = (\lambda\cos(t), \lambda\sin(t))$ pour $(\lambda, t) \in]0,r[\times]0,2\pi[$ (on utilise le résultat (9) de l'appendice dans la deuxième égalité), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{D_r} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{D_r \setminus ([0,+\infty[\times\{0\})} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_{]0,r[\times]0,2\pi[} f(\lambda\cos(t), \lambda\sin(t))\lambda\,\mathrm{d}(\lambda,\theta) = \int_0^r \lambda \int_0^{2\pi} f(\lambda\cos t, \lambda \sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^r \lambda F(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda,
\end{aligned}$$

où la première égalité provient du fait que $[0, +\infty[\times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ est un sous-ensemble négligeable. D'après la question précédente, on a $F(\lambda) = F(0) = 2\pi f(0,0)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On obtient donc

$$\int_{D_r} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = 2\pi f(0,0) \int_0^r \lambda\,\mathrm{d}\lambda = \pi r^2 f(0,0).$$

Appendice

Vous pouvez utiliser sans démonstration les résultats suivants.

(1) Si $n \geqslant 1$ est un entier, toute partie bornée et fermée de $\mathbb{R}^n$ est compacte.

(2) Toute fonction continue définie sur un espace compact atteint son maximum.

(3) Toute suite dans un espace métrique compact admet une sous-suite convergente.

(4) Soit I un intervalle fermé et borné dans $\mathbb{R}$. Toute fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue, autrement dit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

(5) La restriction d'une fonction continue à un sous-ensemble de son domaine de définition est une fonction continue sur ce sous-ensemble.

(6) Si $n \geqslant 1$ est un entier et si A est une application continue d'un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ vers l'espace vectoriel des matrices rélles de taille $n \times n$, alors l'ensemble S des solutions de l'équation différentielle $x'(t) = A(t)x(t)$ dans $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$. En outre, pour tout $t_0 \in I$, l'application de S vers $\mathbb{R}^n$, qui envoie une solution γ en sa valeur en t_0, est une bijection linéaire.

(7) Si $n \geqslant 1$ est un entier et si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$, alors la fonction f est intégrable sur tout sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$.

(8) Si $n \geqslant 1$ est un entier et si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^n$, alors pour tout sous-ensemble dénombrable Z de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n \setminus Z} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(9) Soit $n \geqslant 1$ un entier. Soient U et V deux sous-ensembles ouverts non-vides de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \to V$ une bijection. On suppose que les applications φ et φ^{-1} sont toutes de classe C^1. Si f est une fonction intégrable sur V, alors $(f \circ \varphi)|\text{dét}\,(D\varphi)|$ est une fonction intégrable sur U, et on a la relation

$$\int_V f(y)\,\mathrm{d}y = \int_U f(\varphi(x))|\text{dét}\,(D\varphi(x))|\,\mathrm{d}x.$$