Université Joseph Fourier
MAT112-INT
2012-2013

Contrôle de connaissance
du lundi 15 octobre 2012

Tout document est interdit. Les deux parties de l'épreuve sont indépendantes.

La première partie

Dans cette partie, on considère le système d'équations linéaires suivant :

$$(S_{a,b}) \qquad \begin{cases} 2x+y+z+t=0, \\ -2x+z-t=1, \\ 4x+3y+(b+4)z+(a+1)t=1, \\ 2x+3y+(b+5)z+(a+2b)t=a+1, \end{cases}$$

où a et b sont deux paramètres réels. On désigne par $A_{a,b}$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & b+4 & a+1 \\ 2 & 3 & b+5 & a+2b \end{pmatrix}$$

et par $\varphi_{a,b} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire correspondante à $A_{a,b}$.

1. Déterminer le noyau de $\varphi_{0,1}$.

2. Déterminer la dimension de l'image de $\varphi_{0,1}$.

3. Montrer que le système $(S_{0,1})$ admet une unique solution et la déterminer.

4. Montrer que, si l'application linéaire $\varphi_{a,b}$ est surjective, alors le système $(S_{a,b})$ admet une unique solution.

5. Déterminer l'ensemble des paramètres (a,b) tels que le système $(S_{a,b})$ admet une unique solution.

6. Déterminer le noyau de l'application linéaire $\varphi_{0,0}$ et sa dimension.

7. Le système $(S_{0,0})$ a-t-il des solutions ?

8. Déterminer l'ensemble U des $a \in \mathbb{R}$ tels que le système linéaire $(S_{a,0})$ ait au moins une solution.

9. Pour chacun des $a \in U$, déterminer l'ensemble des solutions du système linéaire $(S_{a,0})$.

La deuxième partie

Dans cette partie, les symboles p et n désignent des entiers qui sont $\geqslant 1$. Soient A et B deux matrices de taille $p \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. On note $A \sim B$ si B peut être obtenue de A via une suite finie d'opérations comme ci-dessous :

(1) interchanger deux lignes,

(2) rajouter un mutiple d'une ligne à une autre ligne,

(3) dilater une linge par un scalaire non-nul.

On convient que, si A et B sont égales, alors $A \sim B$.

Pour tout entier $p \geqslant 1$ on désigne par I_p la matrice de taille $p \times p$ dont les coefficients à la diagonale sont 1 et les autres coefficients sont zéro. Autrement dit,

$$I_p := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Soit σ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que, pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ de taille $2 \times n$ (où v_1 et v_2 sont des vecteurs dans $\mathbb{R}^n$), on a $A \sim \sigma A$. Préciser les opérations que vous effectuez pour retrouver σA à partir de A.

11. Soit τ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où λ est un paramètre réel. Montrer que, pour toute matrice A de taille $2 \times n$, on a $A \sim \tau A$. Préciser les opérations que vous effectuez pour retrouver τA à partir de A.

12. Soit β la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$, où t est un nombre réel non-nul. Montrer que, pour toute matrice A de taille $2 \times n$, on a $A \sim \beta A$. Préciser les opérations que vous effectuez pour retrouver βA à partir de A.

Dans les questions suivantes, on fixe un entier $p \geqslant 2$.

13. Soient i et j deux indices distincts dans $\{1, \ldots, p\}$. On dégine par $\sigma_{i,j}$ la matrice obtenu par interchanger les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lignes de I_p. Montrer que, pour toute matrice A de taille $p \times n$, la matrice $\sigma_{i,j} A$ est obtenue de A en interchangeant les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lignes.

14. En déduire que $\sigma_{i,j}^2 = I_p$.

15. Soient i et j deux indices distincts dans $\{1, \ldots, p\}$, et λ un paramètre réel. On désigne par $\tau_{i,j,\lambda}$ la matrice obtenue de I_p en rajoutant λ fois la $i^{\text{ème}}$ ligne à la $j^{\text{ème}}$ ligne. Montrer que, pour toute matrice A de taille $p \times n$, la matrice $\tau_{i,j,\lambda} A$ est obtenu de A en rajoutant λ fois la $i^{\text{ème}}$ ligne à la $j^{\text{ème}}$ ligne.

16. Déterminer la matrice B de taille $p \times p$ telle que $B \tau_{i,j\lambda} = \tau_{i,j,\lambda} B = I_p$.

17. Soient i un indice dans $\{1, \ldots, p\}$ et t un paramètre réel non-nul. On désigne par $\beta_{i,t}$ la matrice obtenue de I_p en dilatant la $i^{\text{ème}}$ ligne par t. Montrer que, pour toute matrice A de taille $p \times n$, la matrice $\beta_{i,t} A$ est obtenu de A en dilatant la $i^{\text{ème}}$ ligne par t.

18. Déterminer la matrice C de taille $p \times p$ telle que $C \beta_{i,t} = \beta_{i,t} C = I_p$.

19. Soit A une matrice de taille $p \times p$. Montrer que, si $I_p \sim A$ alors il existe une matrice A^{-1} de taille $p \times p$ telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_p$.

20. Montrer que la réciproque de la question précédente est encore vraie.

Université Joseph Fourier
MAT112-INT
2012-2013

Contrôle de connaissance
du lundi 15 octobre 2012

Documents are not allowed. The two parts are independent.

Part one

In this part, we consider the following linear system :

$$(S_{a,b}) \qquad \begin{cases} 2x+y+z+t=0, \\ -2x+z-t=1, \\ 4x+3y+(b+4)z+(a+1)t=1, \\ 2x+3y+(b+5)z+(a+2b)t=a+1, \end{cases}$$

where a and b are two real parameters. We denote by $A_{a,b}$ the matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & b+4 & a+1 \\ 2 & 3 & b+5 & a+2b \end{pmatrix}$$

and by $\varphi_{a,b} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ the linear map corresponding to $A_{a,b}$.

1. Determine the kernel of $\varphi_{0,1}$.

2. Determine the dimension of the image of $\varphi_{0,1}$.

3. Prove that the system $(S_{0,1})$ admits a unique solution and determine it.

4. Prove that, if the linear map $\varphi_{a,b}$ is surjective, then the system $(S_{a,b})$ admits a uniqe solution.

5. Determine the set of parameters (a,b) such that the system $(S_{a,b})$ admits a unique solution.

6. Determine the kerel of the linear map $\varphi_{0,0}$ and its dimension.

7. Does the system $(S_{0,0})$ have solutions ?

8. Determine the set U of $a \in \mathbb{R}$ such that the system $(S_{a,0})$ has at least one solution.

9. For each $a \in U$, determine the set of solutions to the system $(S_{a,0})$.

Second part

In this part, the symbols p and n denote integers which are $\geqslant 1$. Let A and B be two matrices of size $p \times n$ with coefficients in $\mathbb{R}$. We write $A \sim B$ if B can be obtained from A by a sequence of operations as below :

(1) interchange two lines,

(2) add a multiple of one line to another line,

(3) dilate one line by a non-zero scalar.

By convention, if A and B are equal, then $A \sim B$.

For any integer $p \geqslant 1$ we denote by I_p the matrix of size $p \times p$ where the coefficients on the diagonal are 1 and other coefficients are zero. In other words,

$$I_p := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Let σ be the matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Prove that, for any matrix $A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ of size $2 \times n$ (where v_1 and v_2 are vectors in $\mathbb{R}^n$), one has $A \sim \sigma A$. Determine the operations that you effectuate to obtain σA from A.

11. Let τ be the matrix $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, where λ is a real parameter. Prove that, for any matrix A of size $2 \times n$, one has $A \sim \tau A$. Determine the operations that you effectuate to obtain τA from A.

12. Let β be the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$, where t is a non-zero real number. Prove that, for any matrix A of size $2 \times n$, one has $A \sim \beta A$. Determine the operations that you effectuate to obtain βA from A.

In the following questions, we fix an integer $p \geqslant 2$.

13. Let i and j be distinct indices in $\{1, \ldots, p\}$. Denote by $\sigma_{i,j}$ the matrix obtained by interchanging the i^{th} and the j^{th} lines of I_p. Prove that, for any matrix A of size $p \times n$, the matrix $\sigma_{i,j} A$ is obtained from A by interchanging its i^{th} and j^{th} lines.

14. Deduce that $\sigma_{i,j}^2 = I_p$.

15. Let i and j be distinct indices in $\{1, \ldots, p\}$, and λ be a real parameter. Denote by $\tau_{i,j,\lambda}$ the matrix obtained from I_p by adding λ times the i^{th} line to the j^{th} line. Prove that, for any matrix A of size $p \times n$, the matrix $\tau_{i,j,\lambda} A$ is obtained from A by adding λ times the i^{th} line to the j^{th} line.

16. Determine the matrix B of size $p \times p$ such that $B\tau_{i,j\lambda} = \tau_{i,j,\lambda} B = I_p$.

17. Let i be an index in $\{1, \ldots, p\}$ and t be a non-zero real parameter. We denote by $\beta_{i,t}$ the matrix obtained from I_p by delating the i^{th} line by t. Prove that, for any matrix A of size $p \times n$, the matrix $\beta_{i,t} A$ is obtained from A by dilating the i^{th} line by t.

18. Determine the matrix C of size $p \times p$ such that $C\beta_{i,t} = \beta_{i,t} C = I_p$.

19. Let A be a matrix of size $p \times p$. Prove that, if $I_p \sim A$ then there exists a matrix A^{-1} of size $p \times p$ such that $AA^{-1} = A^{-1}A = I_p$.

20. Prove that the reciprocal statement of the previous question is also true.