Université Joseph Fourier
MAT112-INT
2012-2013

Contrôle de connaissance du mercredi 5 décembre 2012

Tout document est interdit. Les trois parties de l'épreuve sont indépendantes.

La première partie

Dans cette partie, l'expression $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels. Si n et m sont deux éléments de $\mathbb{N}$, on dit que n *divise* m (ou de façon équivalente, m *est divisible par* n) lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $m = kn$. On utilise l'expression $n \mid m$ pour désigner cette condition. Soit en outre $\mathbb{P}$ un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. On désigne par $\Theta(\mathbb{P})$ l'énoncé suivant

tout entier naturel $\geqslant 2$ *est divisible par un élément de* $\mathbb{P}$.

1. Déterminer l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}$ qui sont divisibles par 0.

2. Déterminer l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}$ qui divisent 1.

3. Traduire l'énoncé $\Theta(\mathbb{P})$ en une formule.

4. Déterminer la négation de la formule obtenue dans la question précédente.

5. Montrer que, si $1 \in \mathbb{P}$, alors l'énoncé $\Theta(\mathbb{P})$ est vrai.

6. Construire un exemple d'un ensemble $\mathbb{P}$ ne contenant pas 1 tel que $\Theta(\mathbb{P})$ soit vrai.

7. Montrer que, si $n_1, \ldots, n_d$ sont des entiers $\geqslant 2$ ($d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 1$), alors pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, l'entier naturel $n_1 \cdots n_d + 1$ n'est pas divisible par n_i.

8. En déduire que, si $\mathbb{P}$ ne contient pas 1 et si $\Theta(\mathbb{P})$ est vrai, alors $\mathbb{P}$ est un ensemble infini.

La deuxième partie

Dans cette partie, on désigne par P le plan dans $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $x+y+z = 1$.

9. Déterminer l'équation du sous-espace vectoriel F de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$ qui est parallèle au plan P.

10. Déterminer une base de F.

11. Déterminer un système d'équations linéaires qui définit la droite D passant par $\xi = (1, 1, 2)$ et orthogonale à P.

12. Déterminer l'intersection de la droite D avec le plan P.

13. Déterminer une base du sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$ parallèle à D.

14. Déterminer la distance entre le point $\xi = (1, 1, 2)$ et le plan P.

15. Déterminer l'intersection du plan P avec le barycentre de $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$ et $(1, 1, 1)$.

La troisième partie

On désigne par $\mathbb{R}^4_*$ l'ensemble des vecteurs $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ tels que les nombres x_1, x_2, x_3, x_4 soient distincts. Pour tout élément $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4_*$, on désigne par $\mathrm{br}(a, b, c, d)$ le nombre réel

$$\frac{a-c}{a-d} \cdot \frac{b-d}{b-c},$$

appelé le *birapport* de (a, b, c, d).

16. Montrer que $\mathrm{br}(a, b, d, c) = \mathrm{br}(a, b, c, d)^{-1}$.

17. Montrer que $\mathrm{br}(a, c, b, d) = 1 - \mathrm{br}(a, b, c, d)$.

18. Soit λ un nombre réel non-nul et $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer que, si (x_1, x_2, x_3, x_4) est un élément de $\mathbb{R}^4_*$, alors il en est de même de $(\lambda x_1 + \beta, \lambda x_2 + \beta, \lambda x_3 + \beta, \lambda x_4 + \beta)$. En outre, on a

$$\mathrm{br}(\lambda x_1 + \beta, \lambda x_2 + \beta, \lambda x_3 + \beta, \lambda x_4 + \beta) = \mathrm{br}(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

19. Montrer que, si (a, b, c, d) est un élément dans $\mathbb{R}^4_*$ dont les coordonnées sont non-nulles, alors

$$\mathrm{br}(a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, d^{-1}) = \mathrm{br}(a, b, c, d).$$

20. En déduire que, sous réserve d'existence des opérations à faire, le birapport est invariant par une transformation homographique

$$x \longmapsto \frac{\lambda x + \beta}{\mu x + \gamma}$$

appliquée à toutes les coordonnées, où $\lambda, \mu, \beta, \gamma$ sont des nombres réels tels que $\lambda\gamma \neq \mu\beta$.

Contrôle de connaissance
du mercredi 5 décembre 2012

Documents are not allowed. The three parts are independent.

Part one

In this part, the expression $\mathbb{N}$ denotes the set of natural numbers. If n and m are two elements in $\mathbb{N}$, we say that n *divides* m (or equivalently, m *is divisible by* n) when there exists $k \in \mathbb{N}$ such that $m = kn$. We use the expression $n \mid m$ to denote this condition. Let $\mathbb{P}$ be a subset of $\mathbb{N}$. We denote by $\Theta(\mathbb{P})$ the following statement

any natural integer $\geqslant 2$ is divisible par an element in $\mathbb{P}$.

1. Determine the set of integers $n \in \mathbb{N}$ which is divisible by 0.

2. Determine the set of integers $n \in \mathbb{N}$ which divide 1.

3. Translate the statement $\Theta(\mathbb{P})$ into a formula.

4. Determine the negation of the formula obtained in the previous question.

5. Prove that, if $1 \in \mathbb{P}$, then the statement $\Theta(\mathbb{P})$ is true.

6. Construct an example of a set $\mathbb{P}$ not containing 1 such that $\Theta(\mathbb{P})$ is true.

7. Prove that, if $n_1, \ldots, n_d$ are integers $\geqslant 2$ ($d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 1$), then for any $i \in \{1, \ldots, d\}$, the natural number $n_1 \cdots n_d + 1$ is not divisible by n_i.

8. Deduce that if $\mathbb{P}$ does not contain 1 and if $\Theta(\mathbb{P})$ is true, then $\mathbb{P}$ is an infinite set.

Part two

In this part, we denote by P the plane in $\mathbb{R}^3$ defined by the equation $x + y + z = 1$.

9. Determine the equation of the vector subspace F of dimension 2 of $\mathbb{R}^3$ which is parallel to the plane P.

10. Determine a basis of F.

11. Determine a system of linear equations defining the line D passing by $\xi = (1, 1, 2)$ and orthogonal to P.

12. Determine the intersection of the line D and the plane P.

13. Determine a basis of the vector subspace of dimension 1 of $\mathbb{R}^3$ which is parallel to the line D.

14. Determine the distance between the point $\xi = (1, 1, 2)$ and the plane P.

15. Determine the intersection of the plane P and the barycenter of $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$ and $(1, 1, 1)$.

Part three

We denote by $\mathbb{R}^4_*$ the set of vectors $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ such that the numbers x_1, x_2, x_3, x_4 are distincts. For any element $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4_*$, denote by $\mathrm{br}(a, b, c, d)$ the real number

$$\frac{a-c}{a-d} \cdot \frac{b-d}{b-c},$$

called the *biratio* of (a, b, c, d).

16. Prove that $\mathrm{br}(a,b,d,c) = \mathrm{br}(a,b,c,d)^{-1}$.

17. Prove that $\mathrm{br}(a,c,b,d) = 1 - \mathrm{br}(a,b,c,d)$.

18. Let λ be a non-zero real number and $\beta \in \mathbb{R}$. Prove that, if (x_1, x_2, x_3, x_4) is an element of $\mathbb{R}^4_*$, then also is $(\lambda x_1 + \beta, \lambda x_2 + \beta, \lambda x_3 + \beta, \lambda x_4 + \beta)$. Moreover, one has

$$\mathrm{br}(\lambda x_1 + \beta, \lambda x_2 + \beta, \lambda x_3 + \beta, \lambda x_4 + \beta) = \mathrm{br}(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

19. Prove that, if (a,b,c,d) is an element of $\mathbb{R}^4_*$ whose coordinates are non-zero, then

$$\mathrm{br}(a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, d^{-1}) = \mathrm{br}(a,b,c,d).$$

20. Deduce that the biratio is invariant by the homographic transform

$$x \longmapsto \frac{\lambda x + \beta}{\mu x + \gamma}$$

applied to all the coordinates, provided that the operation is well defined, where $\lambda, \mu, \beta, \gamma$ are real numbers such that $\lambda\gamma \neq \mu\beta$.