Université Joseph Fourier
L2 MAT233
2012-2013

Contrôle de connaissance du 11 janvier 2013 (Durée 2 h)

Tout document et tout appareil électronique sont interdits. Les deux parties sont indépendantes. Vous pouvez utiliser sans démonstration les résultats du cours figurant dans l'appendice en indiquant le numéro du résultat que vous utilisez.

Première partie

Dans cette partie, on considère l'équation différentielle suivante :

$$x''(t) + e^t x(t) = 0. \tag{1}$$

On désigne par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de cette équation.

1. Transformer l'équation (1) en une équation différentielle d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que, s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) = f'(t_0) = 0$, alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Énoncer le résultat du cours que vous utilisez.

3. Montrer que, si f n'est pas identiquement nulle, alors pour tout point de zéro t de la fonction f (c'est-à-dire que $f(t) = 0$), il existe $\varepsilon > 0$ tel que la fonction f ne s'annule pas dans l'intervalle ouvert $\left]t, t+\varepsilon\right[$.

Dans la suite, on fixe deux nombres réels α et β tels que $\alpha < \beta$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentelle suivante

$$x''(t) + e^{\alpha} x(t) = 0. \tag{2}$$

On suppose que la fonction g s'annule en les points α et β, et est strictement positive sur l'intervalle ouvert $\left]\alpha, \beta\right[$. On définit le wronskien de f et g comme

$$W(t) = \text{dét}\begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

4. Montrer que $g'(\alpha) \geqslant 0$ et $g'(\beta) \leqslant 0$.

5. Montrer que la fonction f ne peut pas être strictement positive en tout point de l'intervalle $]\alpha, \beta[$. On peut étudier les variations de la fonction W.

6. Montrer que la fonction f ne peut pas être strictement négative en tout point de l'intervalle $]\alpha, \beta[$.

7. En déduire que, entre deux points de zéro consécutifs de la fonction g on trouve au moins un point de zéro de la fonction f.

8. Montre que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, la fonction $\varphi_{s,\alpha}(t) = \sin(s + e^{\alpha/2} t)$ est une solution de l'équation (2).

9. En déduire que, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, la fonction f admet au moins un point de zéro dans l'intervalle $]\tau, \tau + \pi e^{-\tau/2}[$.

Tourner SVP

10. On suppose que f n'est pas identiquement nulle. Montrer que, si $\alpha < \beta$ sont deux points de zéros consécutifs de f, alors on a

$$\pi e^{-\beta/2} \leqslant \beta - \alpha \leqslant \pi e^{-\alpha/2}.$$

Pour la deuxième inégalité, on peut utiliser le résultat de la question précédente ; pour la première inégalité, on peut étudier l'équation différentielle $x''(t)+e^{\beta}x(t) = 0$.

Deuxième partie

Pour toute fonction f à valeurs réelles de classe C^2 définie sur un ouvert U du plan $\mathbb{R}^2$, on désigne par Δf le *laplacien* de f, défini comme :

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f(x,y).$$

On dit que la fonction f est *harmonique* si $\Delta f = 0$. Dans cette partie, on munit le plan $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne usuelle $\|.\|$. On a

$$\|(x,y)\| := \sqrt{x^2+y^2}$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

11. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to]0,+\infty[$ la fonction définie comme $\varphi(x,y) = \|(x,y)\|$. Montrer que $\partial\varphi/\partial x = x/\varphi$ et $\partial\varphi/\partial y = y/\varphi$.

12. Montrer que $\log \circ \varphi$ est une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

13. Déterminer toutes les fonctions harmoniques sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ qui sont de la forme $u \circ \varphi$, où u est une fonction de classe C^2 sur $]0,+\infty[$. On peut déterminer une équation différentielle que la fonction u doit satisfaire.

Dans la suite, on fixe une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ qui est harmonique. Pour tout $\varepsilon > 0$, on désigne par $f_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction qui envoie (x,y) en $f(x,y) + \varepsilon(x^2+y^2)$. Pour tout $r > 0$, soient

$$D_r := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|(x,y)\| \leqslant r\} \quad \text{et} \quad C_r := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|(x,y)\| = r\}.$$

On désigne par $\gamma_r : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée telle que $\gamma_r(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$.

14. Montre que, si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1, alors on a

$$\int_0^{2\pi} h(\gamma_r(t))\sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{r}\int_{D_r} \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}(x,y),$$
$$\int_0^{2\pi} h(\gamma_r(t))\cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{r}\int_{D_r} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}(x,y).$$

On peut par exemple transformer l'intégrale double en des intégrales successives.

15. Montrer que la restriction de f_ε à D_r atteint son maximum en un point $\theta_{\varepsilon,r}$.

16. Montrer que, si $\theta_{\varepsilon,r} \notin C_r$, alors on a simultanément

$$\frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial x^2}(\theta_{\varepsilon,r}) \leqslant 0, \quad \frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial y^2}(\theta_{\varepsilon,r}) \leqslant 0.$$

En déduire que $\theta_{\varepsilon,r}$ appartient nécessairement à C_r. On peut calculer le laplacien de la fonction f_ε.

Tourner SVP

17. Montrer que la restriction de la fonction f à D_r atteint son maximum en un point de C_r. En déduire que, si deux fonctions harmoniques sur $\mathbb{R}$ sont égales le long du cercle C_r, alors elle sont égales dans le disque D_r.

18. On définit une fonction F sur $[0,+\infty[$ comme

$$F(r) = \int_0^{2\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que cette fonction est bien définie et est continue sur $[0,+\infty[$.

19. Montrer que la restrcition de F à $]0,+\infty[$ est dérivable et montrer que sa dérivée est égale à 0. On peut appliquer les résultats obtenu dans la question **14**.

20. Montrer que la fonction f est intégrable sur le disque D_r et on a

$$\int_{D_r} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \pi r^2 f(0,0).$$

Appendice

Vous pouvez utiliser sans démonstration les résultats suivants.

(1) Si $n \geqslant 1$ est un entier, toute partie bornée et fermée de $\mathbb{R}^n$ est compacte.

(2) Toute fonction continue définie sur un espace compact atteint son maximum.

(3) Toute suite dans un espace métrique compact admet une sous-suite convergente.

(4) Soit I un intervalle fermé et borné dans $\mathbb{R}$. Toute fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue, autrement dit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } |x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

(5) La restriction d'une fonction continue à un sous-ensemble de son domaine de définition est une fonction continue sur ce sous-ensemble.

(6) Si $n \geqslant 1$ est un entier et si A est une application continue d'un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ vers l'espace vectoriel des matrices rélles de taille $n \times n$, alors l'ensemble S des solutions de l'équation différentielle $x'(t) = A(t)x(t)$ dans $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$. En outre, pour tout $t_0 \in I$, l'application de S vers $\mathbb{R}^n$, qui envoie une solution γ en sa valeur en t_0, est une bijection linéaire.

(7) Si $n \geqslant 1$ est un entier et si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$, alors la fonction f est intégrable sur tout sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$.

(8) Si $n \geqslant 1$ est un entier et si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^n$, alors pour tout sous-ensemble dénombrable Z de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n \setminus Z} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(9) Soit $n \geqslant 1$ un entier. Soient U et V deux sous-ensembles ouverts non-vides de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \to V$ une bijection. On suppose que les applications φ et φ^{-1} sont toutes de classe C^1. Si f est une fonction intégrable sur V, alors $(f \circ \varphi)|\text{dét}\,(D\varphi)|$ est une fonction intégrable sur U, et on a la relation

$$\int_V f(y)\,\mathrm{d}y = \int_U f(\varphi(x))|\text{dét}\,(D\varphi(x))|\,\mathrm{d}x.$$