Université Joseph Fourier
L2 MAT233
2012-2013

Exercice pour réviser l'examen

Première partie

Dans cette partie, on considère l'équation différentielle suivante :

$$x''(t) + ax(t) = 0, \tag{1}$$

où a est un nombre positif. On désigne par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de cette équation.

1. Transformer l'équation (1) en une équation différentielle d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^2$.
Réponse : On note $y = x'$, alors $y' = x'' = ax$. Donc on peut transformer l'équation différentielle (1) en

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

2. Montrer que, si $f(0) = f'(0) = 0$, alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Énoncer le résultat du cours que vous utilisez.
Réponse : D'abord on vérifie que $(x_0(t), y_0(t)) = (0, 0)$ $(t \in \mathbb{R})$ est une solution de l'équation différentielle linéaire (2). En outre, (f, f') est une autre solution de cette équation. D'après un théorème du cours (théorème 13.6), on a $(f, f') = (x_0, y_0)$. Donc $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3. On suppose que f n'est pas identiquement nulle et que $f(0) = 0$. Montrer qu'il n'existe pas une suite de points de zéro non-nuls de f qui converge vers 0.
Réponse : Supponsons qu'il existe une suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ de points de zéro non-nul de f qui converge vers 0. On a

$$f'(0) = \lim_{n \to +\infty} \frac{f(a_n) - f(0)}{a_n} = 0.$$

D'après la question précédente, on obtient que f est identiquement nulle, qui est absurde.

4. On suppose que $\alpha < \beta$ sont deux points de zéro consécutifs de f. Montrer que $f'(\alpha)f'(\beta) \leqslant 0$.
Réponse : Comme f n'a pas de point de zéro dans $]\alpha, \beta[$, elle ne change pas signe dans cet intervalle. Si $f > 0$ sur $]\alpha, \beta[$, on a

$$f'(\alpha) = \lim_{t \to 0+} \frac{f(\alpha + t) - f(\alpha)}{t} \geqslant 0, \quad f'(\beta) = \lim_{t \to 0+} \frac{f(\beta) - f(\beta - t)}{t} \leqslant 0.$$

Donc $f'(\alpha)f'(\beta) \leqslant 0$. La preuve pour le cas où $f < 0$ sur $]\alpha, \beta[$ est similaire.

5. Montrer que $t \mapsto \cos(\sqrt{a}t)$ est une solution de (1).
Réponse : On a $\cos'(\sqrt{a}t) = -\sqrt{a}\sin(\sqrt{a}t)$ et donc

$$\cos''(\sqrt{a}t) = (-\sqrt{a}\sin(\sqrt{a}t))' = -a\cos(\sqrt{a}t).$$

6. Trouver une autre solution de l'équation (1).
Réponse : $\sin(\sqrt{a}t)$.

7. Déterminer l'ensemble des solution de l'équation (1).
Réponse : L'ensemble Θ des solutions de (1) est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des solutions de (2). D'après un résultat du cours (théorème 13.6), on obtient que cet ensemble est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$ et que l'appilcation de Θ vers $\mathbb{R}^2$ qui envoie f en $(f(0), f'(0))$ est une bijection. Comme $(\cos(\sqrt{a}t), \cos'(\sqrt{a}t) = (1,0)$ et $(\sin(\sqrt{a}t), \sin'(\sqrt{a}t)) = (0,1)$, obtient que $\Theta = \mathbb{R}\cos(\sqrt{a}t) + \mathbb{R}\sin(\sqrt{a}t)$.

Deuxième partie

Pour toute fonction f à valeurs réelles de classe C^2 définie sur un ouvert U du plan $\mathbb{R}^2$, on désigne par Δf le *laplacien* de f, défini comme :

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f(x,y).$$

On dit que la fonction f est *harmonique* si $\Delta f = 0$.

8. Montrer que les fonctions constantes sur $\mathbb{R}^2$ sont harmoniques.
Réponse : Si f est une fonction constante sur $\mathbb{R}^2$, on a $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$ et donc $\partial^2 f/\partial x^2 = \partial^2 f/\partial y^2 = 0$. On en déduit $\Delta(f) = 0$.

9. Soient f et g deux fonctions de classe C^2 définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie l'équation de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \partial f/\partial x = \partial g/\partial y, \\ \partial f/\partial y = -\partial g/\partial x. \end{cases}$$

Montrer que f et g sont tous les deux harmoniques.
Réponse : On a

$$\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}.$$

D'après un résultat du cours (théorème 6.13), on a $\Delta(f) = 0$. De façon similaire, on a $\Delta(g) = 0$.

10. Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ est un maximum local de f. Montrer que $\Delta(f)(x_0, y_0) \leqslant 0$.
Réponse : Le point (x_0, y_0) étant un maximum local de la fonction f, on a $Df(x_0, y_0) = 0$. En particulier, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. D'apère la formule de Taylor (en dimension 1), on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = 2\frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{(x - x_0)^2} \leqslant 0.$$

De même, on a $\partial^2 f/\partial y^2(x_0, y_0) \leqslant 0$. Donc $\Delta(f)(x_0, y_0) \leqslant 0$.

11. Soit f une fonction hamonique. Montrer que, pour tout $b > 0$, la fonction $g : (x, y) \mapsto f(x, y) + b(x^2 + y^2)$ n'a pas de maximum local.
Réponse : Si (x_0, y_0) est un maximum local de g, d'après la question précédente, on a $\Delta(g)(x_0, y_0) \leqslant 0$. Cepedant, comme f est harmonique, on a $\Delta g = \Delta f + 4b = 4b > 0$. Cela est absurde.

Dans la suite, on fixe une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ qui est harmonique. Pour tout $r > 0$, soient

$$A_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \max(|x|, |y|) \leqslant r\} \quad \text{et} \quad L_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \max(|x|, |y|) = r\}.$$

On désigne par $\gamma_r : [0, 8r] \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée telle que

$$\gamma_r(t) = \begin{cases} (r, t - r), & t \in [0, 2r], \\ (3r - t, r), & t \in [2r, 4r], \\ (-r, 5r - t), & t \in [4r, 6r], \\ (t - 7r, -r), & t \in [6r, 8r]. \end{cases}$$

12. Déssiner la courbe paramétrée γ_r.
Réponse : Comme je ne peux pas déssiner avec mon logiciel qui compose cet exercice, je décrit le dessin en phrase. Il s'agit de déssiner le contour L_r qui part du point $(r, -r)$ et revient au même point en sens anti-horologique.

13. Montre que, si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1, alors on a

$$\begin{aligned} \int_{2r}^{4r} h(\gamma_r(t))\,\mathrm{d}t - \int_{6r}^{8r} h(\gamma_r(t))\,\mathrm{d}t &= \int_{A_r} \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}(x, y), \\ \int_{0}^{2r} h(\gamma_r(t))\,\mathrm{d}t - \int_{4r}^{6r} h(\gamma_r(t))\,\mathrm{d}t &= \int_{A_r} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y)\,\mathrm{d}(x, y). \end{aligned}$$

On peut par exemple transformer l'intégrale double en des intégrales successives.
Réponse : Comme le domaine A_r est compact et les fonctions $\partial h/\partial x$ et $\partial h/\partial y$ sont continues, les intégrales doubles sont bien définies (d'après le théorème 9.15 et la proposition 9.18) et peuvent être transformée en une intégrale successive (d'après le théorème 11.6). On a alors

$$\int_{A_r} \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \int_{-r}^{r} \left(\int_{-r}^{r} \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} h(x, r)\,\mathrm{d}x - \int_{-r}^{r} h(x, -r)\,\mathrm{d}x.$$

Quitte à faire des changements de variables ($t = 3r - x$ pour la première intégrale et $t = x + 7r$ pour la deuxième), on obtient la première égalité. La preuve de la deuxième égalité est très similaire.

14. Soit $\phi_f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie comme $(x, y) \mapsto (-\partial f/\partial y, \partial f/\partial x)$. Montrer que

$$\int_0^{8r} \langle \phi_f(\gamma_r(t)), \gamma_r'(t) \rangle \mathrm{d}t = 0.$$

Réponse : $\gamma_r'(t)$ est bien défini partout sauf en un nombre fini de points $t = 0, 2r, 4r, 6r, 8r$. Donc l'intégrale est bien définie. Un calcul direct montre que

$$\gamma'(t) = \begin{cases} (0,1), & t \in]0, 2r[, \\ (-1,0), & t \in]2r, 4r[, \\ (0,-1), & t \in]4r, 6r[, \\ (1,0), & t \in]6r, 8r[. \end{cases}$$

Donc l'intégrale est égale à

$$\int_0^{2r} \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma_r(t))\,\mathrm{d}t + \int_{2r}^{4r} \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma_r(t))\,\mathrm{d}t - \int_{4r}^{6r} \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma_r(t))\,\mathrm{d}t - \int_{6r}^{8r} \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma_r(t))\,\mathrm{d}t,$$

qui est égale à

$$\int_{A_r} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) + \int_{A_r} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\,\mathrm{d}(x,y).$$

Cette intégrale est nulle car $\Delta(f) = 0$.