Université Joseph Fourier
L2 MAT233
2012-2013

Exercice pour réviser l'examen

Première partie

Dans cette partie, on considère l'équation différentielle suivante :

$$x''(t) + ax(t) = 0, \tag{1}$$

où a est un nombre positif. On désigne par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de cette équation.

1. Transformer l'équation (1) en une équation différentielle d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que, si $f(0) = f'(0) = 0$, alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Énoncer le résultat du cours que vous utilisez.

3. On suppose que f n'est pas identiquement nulle et que $f(0) = 0$. Montrer qu'il n'existe pas une suite de points de zéro non-nuls de f qui converge vers 0.

4. On suppose que $\alpha < \beta$ sont deux points de zéro consécutifs de f. Montrer que $f'(\alpha)f'(\beta) \leqslant 0$.

5. Montrer que $t \mapsto \cos(\sqrt{a}t)$ est une solution de (1).

6. Trouver une autre solution de l'équation (1).

7. Déterminer l'ensemble des solution de l'équation (1).

Deuxième partie

Pour toute fonction f à valeurs réelles de classe C^2 définie sur un ouvert U du plan $\mathbb{R}^2$, on désigne par Δf le *laplacien* de f, défini comme :

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f(x, y).$$

On dit que la fonction f est *harmonique* si $\Delta f = 0$.

8. Montrer que les fonctions constantes sur $\mathbb{R}^2$ sont harmoniques.

9. Soient f et g deux fonctions de classe C^2 définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie l'équation de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \partial f/\partial x = \partial g/\partial y, \\ \partial f/\partial y = -\partial g/\partial x. \end{cases}$$

Montrer que f et g sont tous les deux harmoniques.

10. Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ est un maximum local de f. Montrer que $\Delta(f)(x_0, y_0) \leqslant 0$.

11. Soit f une fonction hamonique. Montrer que, pour tout $b > 0$, la fonction g : $(x, y) \mapsto f(x, y) + b(x^2 + y^2)$ n'a pas de maximum local.

Dans la suite, on fixe une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ qui est harmonique. Pour tout $r > 0$, soient

$$A_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \max(|x|, |y|) \leqslant r\} \quad \text{et} \quad L_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \max(|x|, |y|) = r\}.$$

On désigne par $\gamma_r : [0, 8r] \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée telle que

$$\gamma_r(t) = \begin{cases} (r, t - r), & t \in [0, 2r], \\ (3r - t, r), & t \in [2r, 4r], \\ (-r, 5r - t), & t \in [4r, 6r], \\ (t - 7r, -r), & t \in [6r, 8r]. \end{cases}$$

12. Déssiner la courbe paramétrée γ_r.

13. Montre que, si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1, alors on a

$$\int_{2r}^{4r} h(\gamma_r(t))\,\mathrm{d}t - \int_{6r}^{8r} h(\gamma_r(t))\,\mathrm{d}t = \int_{A_r} \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}(x, y),$$
$$\int_{0}^{2r} h(\gamma_r(t))\,\mathrm{d}t - \int_{4r}^{6r} h(\gamma_r(t))\,\mathrm{d}t = \int_{A_r} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y)\,\mathrm{d}(x, y).$$

On peut par exemple transformer l'intégrale double en des intégrales successives.

14. Soit $\phi_f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie comme $(x, y) \mapsto (-\partial f/\partial y, \partial f/\partial x)$. Montrer que

$$\int_0^{8r} \langle \phi_f(\gamma_r(t)), \gamma_r'(t) \rangle \mathrm{d}t = 0.$$