SÉANCE 1: ESPACES EUCLIDIENS

Dans ce cours, toute fonction sur un ensemble est supposée prendre valeurs dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Par fonction de plusieurs variables, on entend une fonction définie sur un sous-ensemble d'un espace vectoriel de dimension fini (mais plus grand que 1) sur $\mathbb{R}$. Pour étudier le calcul différentiel de telle fonctions, il faut introduire une structure de métrique sur l'espace vectoriel. On commence par un rappel sur la notion d'espace vectoriel.

1.1. Espaces vectoriels

Rappelons qu'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est par définition un ensemble non-vide V muni de deux lois de composition comme ci-dessou :

(1) une loi de composition interne (appelée la loi d'addition)

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & V, \\ (x, y) & \longmapsto & x + y, \end{array}$$

(2) une loi de composition externe (appelée la *multiplication par des scalaires*)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times V & \longrightarrow & V, \\ (a, x) & \longmapsto & ax, \end{array}$$

soumises aux conditions suivantes[1] :

(i) la loi d'addition est commutative et associative :

$$\forall\, x, y, z \in V,\ x + y = y + x,\ x + (y + z) = (x + y) + z,$$

(ii) il existe un élément neutre pour la loi d'addition (on vérifie facilement que l'élément neutre $\mathbf{0}$ est unique) :

$$\exists\, \mathbf{0} \in V \text{ tel que } \forall\, x \in V,\ x + \mathbf{0} = x,$$

[1] Les premières trois conditions signifient en fait que $(V, +, \mathbf{0})$ est un groupe commutatif.

(iii) tout élément de V admet une inverse pour la loi d'addition (on vérifie facilement que l'inverse d'un élément est unique) :

$$\forall x \in V,\ \exists -x \in V \text{ tel que } x + (-x) = 0,$$

(iv) pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et tout $x \in V$, $(ab)x = a(bx)$, $(a+b)x = ax + bx$,
(v) pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tous $x, y \in V$, $a(x+y) = ax + ay$,
(vi) pour tout $x \in V$, $1x = x$.

Un sous-ensemble de V contenant $\mathbf{0}$ est appelé un *sous-espace vectoriel* de V s'il est stable par l'addition et la multiplication (par des scalaires). Il est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Si V_1 et V_2 sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, on appelle application linéaire de V_1 vers V_2 toute application $f : V_1 \to V_2$ qui préserve les lois de composition. Autrement dit, pour tout $(x, y) \in V_1 \times V_1$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(\lambda x) = f(x).$$

Si $f : V \to W$ est une application linaire d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, l'image de l'application f est un sous-espace vectoriel de W, noté comme $\mathrm{Im}(f)$. En outre, l'ensemble $\mathrm{Ker}(f) := \{x \in V \mid f(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de V, appelé le *noyau* de f.

Exemple 1.1. — (1) Soit $n \geqslant 0$ un entier. L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Sa loi d'addition est $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ et la mulplication scalaire est $\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$. L'élément neutre est le vecteur dont les coefficients sont tous nuls.

(2) Plus généralement, soient M un ensemble et $\mathbb{R}^M$ l'ensemble des applications de M vers $\mathbb{R}$. Si f et g sont deux fonctions sur M, on désigne par $f + g$ la fonction qui envoie $x \in M$ en $f(x) + g(x)$. Si f est une fonction sur M et si λ est un nombre réel, on désigne par λf la fonction qui envoie $x \in M$ en $\lambda f(x)$. On vérifie facilement que $\mathbb{R}^M$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Son élément neutre est la fonction identiquement nulle. Si $n \geqslant 0$ est un entier, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ peut être considéré comme $\mathbb{R}^{\{1,\ldots,n\}}$.

(3) Soit M un ensemble. On désigne par $\mathbb{R}^{(M)}$ l'ensemble des fonctions sur M qui s'annule en tout sauf un nombre fini de points dans M. On vérifie facilement que $\mathbb{R}^{(M)}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^M$. Bien évidemment, ces deux espaces vectoriels sont identiques lorsque M est un ensemble fini.

Exercice 1.2. — Soit M un ensemble non-vide. Montrer que, pour tout espace vectoriel V, toute application $\varphi : M \to V$ se prolonge de façon unique en une application linéaire de $\mathbb{R}^{(M)}$ vers $\mathbb{R}$.

1.2. Produit scalaire

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle *forme bilinéaire* sur V toute application $\langle\,,\,\rangle$ de $V \times V$ vers $\mathbb{R}$ qui est $\mathbb{R}$-linéaire en les deux coordonnées. Autrement dit, l'application

$$\begin{array}{rccc} \langle\,,\,\rangle : & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \longmapsto & \langle x,y\rangle \end{array}$$

vérifie la condition suivante : pour tous éléments x, y et z dans V et tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x,z\rangle + \mu\langle y,z\rangle, \quad \langle z, \lambda x + \mu y\rangle = \lambda\langle z,x\rangle + \mu\langle z,y\rangle.$$

On dit qu'une forme bilinéaire $\langle\,,\,\rangle$ est *symétrique* si, pour tout $(x,y) \in V^2$, l'égalité $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ est vérifiée. On dit qu'une forme bilinéaire symétrique $\langle\,,\,\rangle$ est un *produit scalaire* sur V si elle est *définie positive*, autrement dit, pour tout $x \in V$ on a $\langle x,x\rangle \geqslant 0$, et la relation $\langle x,x\rangle = 0$ est vérifiée si et seulement si $x = 0$.

Exemple 1.3. — Soit $n \geqslant 0$ un entier. Considérons l'application $\langle\,,\,\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que, pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on ait $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$. C'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Graphiquement le produit scalaire mesure l'angle entre les vecteurs (dessin au cours pour le cas où $n = 2$).

***Théorème 1.4* (Cauchy-Schwarz)**. — *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire $\langle\,,\,\rangle$. Pour tout élément $(x,y) \in V^2$, on a*

$$\langle x,y\rangle^2 \leqslant \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle.$$

Démonstration. — Considérons l'application φ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui envoie t en $\langle x+ty, x+ty\rangle$. Comme un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique, on obtient

$$\varphi(t) = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle t + \langle y,y\rangle t^2.$$

Donc φ est une polynôme quadratique en t. En outre, comme $\langle\,,\,\rangle$ est définie positive, la fonction φ est positive, d'où son discriminant est négaltif, c'est-à-dire que

$$4\langle x,y\rangle^2 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leqslant 0.$$

Le résultat est donc démontré. □

Définition 1.5. — On appelle *espace euclidien* tout espace vectoriel de type fini muni d'un produit scalaire.

1.3. Espaces métriques

Intuitivement, un espace métrique est un ensemble non-vide où on a défini une distance pour tout couple de points au-dedans.

Définition 1.6. — Soit M un ensemble non-vide. On appelle *métrique* sur M toute application $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les conditions suivante :

(1) pour tout $(x, y) \in M^2$, $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$,
(2) pour tout $(x, y) \in M^2$, on a $d(x, y) = d(y, x)$
(3) (inégalité triangulaire) pour tout $(x, y, z) \in M^3$, on a $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

La couple (M, d) est appelée un *espace métrique*.

***Exercice 1.7* (métrique discrète).** — Soit M un ensemble non-vide. On définit $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ comme la suite

$$\forall\, (x, y) \in M \times M, \quad d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Montrer que (M, d) est un espace métrique.

On peut introduire une métrique sur un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ via un produit scalaire.

Proposition 1.8. — *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire $\langle\, , \rangle$. Pour tout vecteur $x \in V$ on définit $\|x\| := \langle x, x\rangle^{1/2}$. Alors l'application*

$$d : V \times V \to \mathbb{R}_+, \quad d(x, y) := \|x - y\|$$

est une métrique sur V.

Démonstration. — Par définition $d(x, y) = 0$ si et seulement si $\langle x - y, x - y\rangle = 0$, qui est équivalente à la condition $x - y = 0$. En outre, comme le produit scalaire est bilinéaire, on obtient

$$d(x, y)^2 = \langle x - y, x - y\rangle$$

Montrons dans la suite que l'application $\|.\|$ vérifie l'inégalité triangulaire

$$\forall\, x, y \in V, \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle &= \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

où l'égalité provient du théorème 1.4. Le passage à l'inégalité triangulaire pour d est laissé comme un exercice. □

1.4. Base orthonormée d'un espace euclidien

Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\, , \rangle$. On dit que deux vecteurs x et y dans V sont *orthogonaux* si $\langle x, y\rangle = 0$, noté comme $x \perp y$.

Proposition 1.9. — *Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\, , \rangle$. Si x et y sont deux éléments orthogonaux dans V, alors $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Démonstration. — Comme le produit scalaire est bilinéaire, on a

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

□

Si W est un sous-espace vectoriel de V, on désigne par $W^\perp$ l'ensemble des éléments de V qui sont orthogonal à tout vecteur de W (*déssin de deux vecteurs orthogonaux dans* $\mathbb{R}^2$).

Soient V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$ et x un vecteur non-nul dans V. On définit une application linéaire $\mathrm{pr}_x : V \to \mathbb{R}x$ telle que

$$\mathrm{pr}_x(y) := \frac{\langle y,x\rangle}{\langle x,x\rangle} x,$$

appelée la *projection orthogonale* le long de x.

Proposition 1.10. — *Soient V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$, et x un vecteur non-nul dans V.*

(1) Pour tout élément y dans V, le vecteur $y - \mathrm{pr}_x(y)$ est orthogonal à x.

(2) Le vecteur $\mathrm{pr}_x(y)$ est le seul élément de $\mathbb{R}x$ qui minimise la fonction

$$(z \in \mathbb{R}x) \longmapsto \|z-y\|.$$

Démonstration. — (1) On a

$$\langle \mathrm{pr}_x(y), x\rangle = \frac{\langle y,x\rangle}{\langle x,x\rangle}\langle x,x\rangle = \langle y,x\rangle.$$

(2) Comme $y - \mathrm{pr}_x(y)$ est orthogonal à x et $\mathrm{pr}_x(y) - z$ est proportionnel à x, on a (d'après [**?**])

$$\|z-y\|^2 = \|y - \mathrm{pr}_x(y)\|^2 + \|\mathrm{pr}_x(y) - z\|^2 \geqslant \|y - \mathrm{pr}_x(y)\|^2.$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si $\|\mathrm{pr}_x(y) - z\| = 0$, i.e. $z = \mathrm{pr}_x(y)$. □

Soit V un espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$. Soit $(e_i)_{i=1}^n$ une base de V. On dit que $(e_i)_{i=1}^n$ est une *base orthonormée* de V si on a

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Théorème 1.11. — *Soient V un espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$ et $(x_i)_{i=1}^n$ une base V. Il existe une matrice triangulaire supérieure A telle que*

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} := A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

forme une base orthonormée de V.

Démonstration. — Dans le cas où $n = 1$, il suffit de prendre
$$e_1 = x_1/\|x_1\|.$$
Pour le cas général, on prend toujours $e_n = x_n/\|x_n\|$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, soit $y_i = x_i - \mathrm{pr}_{e_n}(x_i)$. La proposition précédente montre que $y_i \perp e_n$. Montrons que les vecteurs $y_1, \ldots, y_{n-1}, e_n$ sont linéairement indépendants. Soient $(\lambda_i)_{i=1}^n$ des nombres réels tels que $\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_{n-1} y_{n-1} + \lambda_n e_n = \mathbf{0}$. On a alors
$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \left(\lambda_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle x_i, x_n\rangle}{\langle x_n, x_n\rangle}\right) x_n = \mathbf{0}.$$
Comme $(x_i)_{i=1}^n$ sont indépendants, on obtient $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$. En outre, comme e_n est indépendant aux $(y_i)_{i=1}^{n-1}$, on a
$$\lambda_n = \langle \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_{n-1} y_{n-1} + \lambda_n e_n, e_n\rangle = \langle \mathbf{0}, e_n\rangle = 0.$$
Par l'hypothèse de récurrence, il existe une matrice triangulaire supérieure $\widetilde{A}$ telle que $(e_1, \ldots, e_{n-1})^T := \widetilde{A}(y_1, \ldots, y_{n-1})$ soit une famille orthonormée, d'où
$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{0} & \|x_n\|^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
est une base orthonormée de V, où $\boldsymbol{\alpha} = -\big(\langle x_1, e_n\rangle, \ldots, \langle x_{n-1}, e_n\rangle\big)^T$. □

Remarque 1.12. — Le théorème montre que tout espace euclidien est isomorphe à certain $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel. En outre, la démonstration du théorème donne un algorithme (dit de Gram-Schmidt) pour construire explicitement une base orthonormée à partir d'une base quelconque.