SÉANCE 11 : CALCUL D'INTÉGRATION

11.1. Le cas de dimension 1

Théorème 11.1. — *Soient I un intervalle fermé et borné dans $\mathbb{R}$ et f une fonction sur I. On étend f en une fonction sur $\mathbb{R}$ en prenant $f(t) = 0$ pour $t \in \mathbb{R} \setminus I$. Si f est intégrable au sens de Riemann, alors elle est intégrable au sens du cours, et $\int f(t)\,\mathrm{d}t$ coïncide à l'intégrale au sens de Riemann de f sur I.*

Démonstration. — L'intégrabilité de f au sens de Riemann entraîne que

$$\sup_{\substack{g \in L^1_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}) \\ g \leqslant f}} \int g(x)\,\mathrm{d}x = \inf_{\substack{h \in L^1_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}) \\ h \geqslant f}} \int h(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R},$$

qui implique l'intégrabilité au sens du cours et l'égalité entre les intégrales aux deux sens. □

11.2. Fonctions négligeable

Soit f une fonctions dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. On dit que f est *négligeable* si

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0.$$

On dit qu'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^d$ est *négligeable* si $\mathbb{1}_A$ est bornée par une fonction négligeable. D'après le théorème 9.9, une somme dénombrable de fonctions négligeables est encore négligeable, et donc une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est encore négligeable.

Exemple 11.2. — Un point dans $\mathbb{R}^d$ est négligeable car il s'écrit comme l'intersection dénombrable des pavés dont le volume tend vers 0. Donc tout sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}^d$ est négligeable.

Lemme 11.3. — *Un ensemble A est négligeable si et seulement si $\mathbb{1}_A$ est dans $\overline{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et si $\int \mathbb{1}_A = 0$.*

Démonstration. — La nécessité est sans doute vraie. Montrons la suffisance. La condition $\mathbb{1}_A$ est dans $\overline{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $\int \mathbb{1}_A = 0$ montre qu'il existe une suite décroissante de fonctions $(h_n)_{n\geqslant 0}$ dans $L^1_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^d)_\uparrow$ qui domine $\mathbb{1}_A$ et telle que $\int h_n$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Le théorème de convergence dominée implique alors que la limite des h_n est une fonction intégrable et d'intégrale 0. Cette fonction domine aussi $\mathbb{1}_A$. □

Proposition 11.4. — *Soit f une fonction dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Si f est négligeable, alors l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}$ est négligeable.*

Démonstration. — Si la fonction f est négligeable, il en est de même de $|f|$. On peut alors supposer que f est positive. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note

$$A_n = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \geqslant n^{-1}\}.$$

On a donc

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n\geqslant 1} A_n.$$

Il suffit alors de montrer que chaque A_n est négligeable. Pour tout n, on a

$$f \geqslant \frac{1}{n}\mathbb{1}_{A_n},$$

et donc

$$0 \leqslant \frac{1}{n}\int \mathbb{1}_{A_n} \leqslant \int f = 0.$$

Par le lemme précédent, on obtient que A_n est négligeable. Le résultat est ainsi démontré. □

Définition 11.5. — Soient f et g deux fonctions sur $\mathbb{R}^d$. Si elle ne diffèrent que sur un sous-ensemble négligeable et si f est intégrable, on définit $\int g$ comme $\int f$. Cette définition ne dépend pas du choix de f.

11.3. Théorème de Fubini

***Théorème 11.6* (Fubini)**. — *Soient p et n deux entiers $\geqslant 1$. Si f est une fonction positive sur $\mathbb{R}^{p+n}$ qui est dans $\mathscr{M}(L^1_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^{p+n}))$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ on a $f(x,\cdot) \in \mathscr{M}(L^1_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^n))$ et la fonction*

$$x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

est dans $\mathscr{M}(L^1_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^p))$. De plus, on a

$$\int_{\mathbb{R}^{p+n}} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p}\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Théorème 11.7. — *Soient p et n deux entiers $\geqslant 1$, et f une fonction sur $\mathbb{R}^{p+n}$ qui est dans $\mathscr{M}(L^1_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^{p+n}))$. Si*

$$\int_{\mathbb{R}^p}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x,y)|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x<+\infty,$$

alors la fonction f est intégrable, l'ensemble des $x\in\mathbb{R}^p$ tels que $f(x,\cdot)$ n'est pas intégrable est négligeable, et on a

$$\int_{\mathbb{R}^{p+n}}f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)=\int_{\mathbb{R}^p}\int_{\mathbb{R}^n}f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

On peut appliquer le théorème de Fubini à étudier la graphe d'une fonction continue.

Soit f une fonction sur $\mathbb{R}^{d-1}$. On appelle *graphe* de f la partie

$$\{(x,f(x))\,|\,x\in\mathbb{R}^{d-1}\}$$

de $\mathbb{R}^d$, noté comme Γ_f.

Proposition 11.8. — *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^{d-1}$. Alors le graphe de f est un sous-ensemble négligeable.*

Démonstration. — La graphe d'une fonction continue est un sous-ensemble fermé car il est l'image réciproque de la diagnoale $\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ de l'application

$$X\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\times\mathbb{R},\quad (x,t)\longmapsto(f(x),t).$$

Donc $1\!\!1_{\Gamma_f}$ est une fonction positive dans $\mathscr{M}(L^1_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^d))$. Par le théorème de Fubini, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d}1\!\!1_{\Gamma_f}(x,t)\,\mathrm{d}(x,t)=\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\int_{\{t=f(x)\}}1\!\!1_{\Gamma_f}(x,t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x=0$$

puisque $\{f(x)\}$ est un ensemble négligeable dans $\mathbb{R}$. Le résultat est donc démontré. $\square$

11.4. Changement de varaibles

Théorème 11.9. — *Soient U et V deux sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^d$, et $\varphi:U\to V$ une bijection. On suppose que φ et φ^{-1} sont tous les deux de classe C^1. Si f est une fonction positive sur V qui est la restriction d'une fonction dans $\mathscr{M}(L^1_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^d))$, alors on a*

$$\int_V f(y)\,\mathrm{d}y=\int_U f(\varphi(x))|\mathrm{d\acute{e}t}J_\varphi(x)|\,\mathrm{d}x.$$