SÉANCE 12 : COURBE PARAMÉTRÉE

12.1. Définition

Soit I un intervalle dans $\mathbb{R}$. On appelle *courbe paramétrée* de classe C^0 dans $\mathbb{R}^d$ toute application continue $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$. En général, si $n \geqslant 1$ est un entier, on peut définir les courbes paramétrées de classe C^n d'une façon récursive. On dit qu'une application $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ est une courbe paramétrée de classe C^n si elle est continûment différentiable sur l'intérieur de I et si γ' s'étend par continuité en une courbe paramétrée de classe C^{n-1}.

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée de classe C^1. Soit x un point intérieur de I. On dit que la courbe paramétrée est régulière en x si $\gamma'(x) \neq 0$. Dans ce cas-là la *tangente* de γ en x est définie comme la droite

$$\gamma(x) + t\gamma'(x), \quad t \in \mathbb{R}.$$

On dit qu'une courbe paramétrée est régulière si elle est régulière en tout point intérieur de I.

12.2. Branches infinies d'une courbe paramétrée dans $\mathbb{R}^2$

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée de classe C^1. Pour $t \in I$, on désigne par $x(t)$ et $y(t)$ les deux coordonnées de $\gamma(t)$.

Définition 12.1. — Soit t_0 une borne de l'intervalle I. On dit que la courbe paramétrée γ possède une branche infinie en t_0 si $\lim_{t\to t_0} \|\gamma(t)\| = +\infty$.

Dans la pratique, plusieurs cas apparaissent quand t tend vers t_0

(1) Si $\lim_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ et si $\lim_{t\to t_0} y(t) = \ell \in \mathbb{R}$, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote de la courbe γ.
(2) Si $\lim_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$ et si $\lim_{t\to t_0} x(t) = \ell \in \mathbb{R}$, on dit que la droite d'équation $x = \ell$ est une asymptote de la courbe γ.

(3) Si $\lim_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$, on étudie $\lim_{t\to t_0} y(t)/x(t)$ et $\lim_{t\to t_0} x(t)/y(t)$.
   (3.1) Si $\lim_{t\to t_0} y(t)/x(t) = \pm\infty$, on dit que la courbe admet une branche parabolique dans la direction Oy.
   (3.2) Si $\lim_{t\to t_0} x(t)/y(t) = \pm\infty$, on dit que la courbe admet une branche parabolique dans la direction Ox.
   (3.3) Si $\lim_{t\to t_0} y(t)/x(t) = a \in \mathbb{R}$, on étudie la limite $\lim_{t\to t_0} y(t) - ax(t)$.
   - Si $\lim_{t\to t_0} y(t) - ax(t) = b \in \mathbb{R}$, on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote de la courbe.
   - Si $\lim_{t\to t_0} y(t) - ax(t) = \pm\infty$, on dit que la courbe admet une branche parabolique dans la direction de $y = ax$.

12.3. Changement de paramétrisation

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée. Si J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $\varphi : J \to I$ est un homéomorphisme, alors $\gamma \circ \varphi : J \to \mathbb{R}^d$ est une courbe paramétrée. Le procédé d'associer γ à la courbe $\gamma \circ \varphi$ est appelé un changement de paramétrisation (on dit aussi que φ est un changement de paramétrisation). Si la fonction φ est de classe C^1 et si la condition $\varphi'(u) \neq 0$ est vérifiée pour tout $u \in J^\circ$, on dit que le changement de paramétrisation est régulier. On peut facilement démontrer que, si le changement de paramétrisation est régulier et si la courbe γ est de classe C^1, alors il en est de même de la courbe paramétrée $\gamma \circ \varphi$. En outre, la courbe γ est régulière en $t \in I^\circ$ si et seulement si $\gamma \circ \varphi$ est régulière en $\varphi^{-1}(t) \in J^\circ$.

12.4. Longueur d'une courbe paramétrée

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée qui est régulière de classe C^1. Si t_0 est un point intérieur de I, on définit une fonction $s : I \to \mathbb{R}^d$ comme la suite

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| \,\mathrm{d}u.$$

On utilise aussi l'expression s_{γ,t_0} pour désigner cette fonction. C'est une fonction strictement croissante et continue sur I, donc définit une bijection entre I et son image $s(I)$. En outre, la fonction s est continûment différentiable et on a $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$. Si $\varphi : J \to I$ est un changement de paramétrisation qui est régulier, alors on a

$$s_{\gamma\circ\varphi,\varphi^{-1}(t_0)} = s_{\gamma,t_0} \circ \varphi. \tag{12.1}$$

L'application s définit un changement de paramétrisation pour la courbe paramétrée γ. Plus précisément, l'application composée $\gamma \circ s^{-1} : s(I) \to \mathbb{R}^d$ est une courbe paramétrée de classe C^1 qui est régulière.

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée de classe C^1. On dit que γ est paramétrée par longueur si $\|\gamma'(t)\| = 1$ pour tout $t \in I$.

Proposition 12.2. — *Soient $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée et $s : I \to \mathbb{R}$ la fonction de longueur associée. Alors la courbe $\gamma \circ s^{-1} : s(I) \to \mathbb{R}^d$ est paramétrée par la longueur.*

Démonstration. — Par définition on a

$$(\gamma \circ s^{-1})' = (\gamma' \circ s^{-1})(s^{-1})' = \frac{\gamma' \circ s^{-1}}{s' \circ s^{-1}} = \frac{\gamma' \circ s^{-1}}{\|\gamma' \circ s^{-1}\|}, \tag{12.2}$$

d'où $\|(\gamma \circ s^{-1})'\| = 1$. □

12.5. Courbure

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée. On choisit $t_0 \in I^\circ$ et définit la fonction de longueur $s : I \to \mathbb{R}$ comme

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| \, \mathrm{d}u.$$

Pour tout $t \in I^\circ$, on définit la *courbure* de γ en t comme

$$\kappa_\gamma(t) := \|(\gamma \circ s^{-1})''(s(t))\|.$$

Remarque 12.3. — Cette définition ne dépend pas du choix de t_0 car le choix d'un autre point entraîne la difference de la fonction s par une constante. En outre, la relation (12.1) montre que la fonction de courbure est invariante sous changement de paramétrisations régulier. Autrement dit, si φ est un changement de paramétrisation régulier, alors on a $\kappa_{\gamma\circ\varphi} = \kappa_\gamma \circ \varphi$.

Il est utile de donner la formule générale pour calculer la courbure.

Théorème 12.4. — *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée. Pour tout $t \in I^\circ$, on a*

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \cdot \left\| \gamma''(t) - \frac{\langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^2} \gamma'(t) \right\|$$

Démonstration. — D'après (12.2), on a

$$\begin{aligned}(\gamma \circ s^{-1})'' &= \frac{(\gamma' \circ s^{-1})'}{\|\gamma' \circ s^{-1}\|} - \frac{\|\gamma' \circ s^{-1}\|'}{\|\gamma' \circ s^{-1}\|^2}(\gamma' \circ s^{-1}) \\ &= \frac{\gamma'' \circ s^{-1}}{\|\gamma' \circ s^{-1}\|^2} - \frac{\|\gamma' \circ s^{-1}\|'}{\|\gamma' \circ s^{-1}\|^2}(\gamma' \circ s^{-1})\end{aligned}$$

En outre, on a $\|\gamma' \circ s^{-1}\| = \langle \gamma' \circ s^{-1}, \gamma' \circ s^{-1} \rangle^{1/2}$. Donc

$$\|\gamma' \circ s^{-1}\|' = \frac{1}{\|\gamma' \circ s^{-1}\|} \langle \gamma' \circ s^{-1}, (\gamma' \circ s^{-1})' \rangle = \frac{\langle \gamma' \circ s^{-1}, \gamma'' \circ s^{-1} \rangle}{\|\gamma' \circ s^{-1}\|^2}.$$

Par conséquent, on a

$$\kappa_\gamma = \frac{1}{\|\gamma'\|} \cdot \left\| \gamma'' - \frac{\langle \gamma'', \gamma' \rangle}{\|\gamma'\|^2} \gamma' \right\|$$

□