SÉANCE 13 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

13.1. Introduction

On appelle équation différentielle ordinaire toute relation entre une variable t, une fonction vectorielle x de cette variable ainsi que ses dérivées jusqu'à certains ordres. Quitte à augmenter l'espace d'arrivé de la fonction x, on peut faire disparaître les dérivées d'ordre supérieur.

Exemple 13.1. — Considérons l'équation différentielle

$$x'' = ax' + bx + c,$$

où x est une fonction à valeur réelle. Quitte à introduire des fonctions $y_1 = x$ et $y_2 = x'$, cette équation peut être transformée à

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ ay_2 + by_1 + c \end{pmatrix}.$$

Dans ce cours, on considère les équations différentielles de la forme

$$x' = f(t, x),$$

où x est une fonction en t à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Une solution de cette équation est par définiton une courbe paramétrée définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, qui vérifie cette équation.

13.2. Équation linéaire à coefficients constants

Dans ce paragraphe, on considère l'équation différentielle

$$x' = Ax, \tag{13.1}$$

où A est une matrice de taille $d \times d$.

Pour toute matrice A de taille $d \times d$, on désigne par $\exp(A)$ la somme de la série convergente

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} A^n$$

dans $M_{d \times d}(\mathbb{R})$, où on convient que A^0 est la matrice d'identité.

Théorème 13.2. — *Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, l'application*

$$x(t) = \exp(tA)x_0$$

est une solution à l'équation (13.1).

Démonstration. — La série de fonctions

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} t^n A^n x_0$$

est de rayon de convergence $+\infty$. On peut donc dériver terme par terme. La dérivée de cette série est

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n!} n t^{n-1} A^n x_0 = A \sum_{m \geqslant 0} \frac{1}{m!} t^m A^m x_0.$$

Le résultat est ainsi achevé. □

On peut ensuite résoudre les équations inhomogènes de la forme

$$x'(t) = Ax(t) + \varphi(t). \tag{13.2}$$

On utilisera le fait suivant : si x est une application dérivable d'un intervalle ouvert vers $\mathbb{R}^d$, alors on a

$$(\exp(-tA)x(t))' = \exp(-tA)(x'(t) - Ax(t)).$$

Par cette égalité, on peut transformer l'équation (13.2) en

$$(\exp(-tA)x(t))' = \exp(-tA)\varphi(t).$$

Théorème 13.3. — *On suppose que toute coordonnée de la fonction* $\exp(-tA)\varphi(t)$ *est continue et est intégrable sur tout intervalle compact contenu dans un intervalle ouvert I. Soit t_0 un point dans I. Pour tout vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^d$, la courbe paramétrée*

$$x(t) = \exp(tA)x_0 + \int_{t_0}^{t} \exp((t-s)A)\varphi(s)\,\mathrm{d}s$$

est une solution de l'équation (13.2).

13.3. Équation linéaire générale

Dans ce paragraphe, on étudie les équations de la forme

$$x'(t) = A(t)x(t), \tag{13.3}$$

où A est une application continue d'un intervalle ouvert I dans $M_{d\times d}(\mathbb{R})$. On veut étudier l'espace des solutions de cette équation. Un outil important est le théorème du point fixe de Picard.

Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une application $T : X \to X$ est une contraction s'il existe $\varepsilon \in [0, 1[$ tel que

$$d(T(a), T(b)) \leqslant \varepsilon d(a, b)$$

quels que soient $a, b \in X$.

Théorème 13.4. — *Soit (X, d) un espace métrique complet non-vide. Si $T : X \to X$ est une contraction, alors il existe un unique point $a \in X$ tel que $T(a) = a$ (point fixe).*

Démonstration. — Montrons d'abord l'unicité. Si a et b sont deux points fixes de T qui sont distincts, alors on a

$$d(a, b) = d(T(a), T(b)) \leqslant \varepsilon d(a, b) < d(a, b),$$

une contradiction.

Montrons maintenant l'existence. On choisit un point a_0 dans X et on note $a_n = T^n(a_0)$. Comme T est une contractions, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$d(a_n, a_{n+1}) \leqslant \varepsilon^n d(a_1, a_0).$$

On en déduit que, pour tous indices $n < m$, on a

$$d(a_n, a_m) \leqslant \frac{\varepsilon^n}{1-\varepsilon} d(a_1, a_0),$$

qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Donc la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy, donc converge vers un point $a \in X$. Étant une contraction, l'application T est continue, on a donc $T(a) = a$. □

Corollaire 13.5. — *Soit (X, d) un espace métrique complet et non-vide. Si $T : X \to X$ est une application telle que T^m soit une contraction pour certain $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 1$, alors T admet un unique point fixe.*

Démonstration. — Si a est un point fixe de T, alors il est aussi un point fixe de T^m. Donc l'unicité est vérifiée.

D'après le théorème précédent, l'application T^m admet un unique point fixe a. On a $T^m(T(a)) = T^{m+1}(a) = T(T^m(a))) = T(a)$. Donc $T(a)$ est aussi un point fixe de T^m. Par l'unicité du point fixe, on obtient $T(a) = a$. □

Théorème 13.6. — *Pour tout $t_0 \in I$ et tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, il existe un unique courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ telle que $\gamma(t_0) = x_0$ et que $\gamma'(t) = A(t)\gamma(t)$ quel que soit $t \in I$.*

Démonstration. — Pour tout sous-intervalle compact J de I contenant x_0 on désigne par Θ l'espace des courbe paramétrées $\gamma : J \to \mathbb{R}^d$ de classe C^0 telles que $\gamma(t_0) = x_0$. On munit Θ de la métrique suivante :

$$d(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{t \in J} \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|.$$

C'est un espace complet car si $(\gamma_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans Θ alors $(\gamma_n(t))_{n \geqslant 0}$ est une suite de Cauchy pour tout $t \in J$ et la courbe paramétrée limite reste encore dans Θ (la convergence est uniforme). On définit une application $T : \Theta \to \Theta$ qui envoie γ en

$$T\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)\gamma(s)\,\mathrm{d}s.$$

La courbe paramétrée $\gamma \in \Theta$ vérifie les conditions du théorème sur J si et seulement si elle est le point fixe de T.

Soit $K = \sup_{t \in J} \|A(t)\|$. Pour toutes γ_1 et γ_2 dans Θ, on a

$$\|T\gamma_1(t) - T\gamma_2(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} A(s)(\gamma_1(s) - \gamma_2(s))\,\mathrm{d}s \right\| \leqslant K d(\gamma_1 - \gamma_2)|t - t_0|.$$

Par récurrence on obtient que, pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 1$, on a

$$\|T^m\gamma_1(t) - T^m\gamma_2(t)\| \leq \frac{K^m \ell(J)^m}{m!} d(\gamma_1, \gamma_2).$$

Donc T^m est une contraction lorsque m est assez grand. On en déduit l'unicité du point fixe. Comme J est arbitraire, le résultat est démontré. □

On désigne par S l'espace des solutions de l'équation (13.3) sur I. Pour tous $t_0, t \in I$ et tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, on désigne par $R_{t_0}^t(x_0)$ la valeur en t de la courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ qui vérifie l'équation (13.3) et telle que $\gamma(t_0) = x_0$. Ainsi on définit $R_{t_0}^t$ comme une application de $\mathbb{R}^d$ vers $\mathbb{R}^d$.

Proposition 13.7. — *Pour tout $t_0 \in I$, l'application $R_{t_0} : \mathbb{R}^d \to S$ qui envoie $x_0 \in \mathbb{R}^d$ en la courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ qui vérifie l'équation* (13.3) *et telle que $\gamma(t_0) = x_0$ est une bijection linéaire. En outre, on a $R_{t_0}^t = R_t^{-1} \circ R_{t_0}$.*

Démonstration. — Le théorème précédent montre que R_{t_0} est une bijection. Elle est linéaire car l'équation différentielle (13.3) est linéaire. Enfin la relation $R_{t_0}^t = R_t^{-1} \circ R_{t_0}$ provient de la définition. □

13.4. Équation affine

On s'intéresse à l'équation

$$x'(t) = A(t)x(t) + \varphi(t), \tag{13.4}$$

Si γ_0 est une solution particulière à cette équation, alors toute solution de l'équation s'écrit sous la forme $\gamma_0 + \gamma$, où γ est une solution à l'équation (13.3). Pour trouver une solution particulière γ_0, on utilise la méthode de variation des constantes. On cherche une solution de la forme

$$\gamma_0(t) = R_{t_0}^t y(t).$$

Si on dérive cette relation, on obtient

$$\gamma_0'(t) = \frac{dR_{t_0}^t}{dt} y(t) + R_{t_0}^t y'(t).$$

Rappelons que l'on a $dR_{t_0}^t/dt = A(t)R_{t_0}^t$. Donc

$$\gamma_0'(t) = A(t)\gamma_0'(t) + R_{t_0}^t y'(t).$$

Comme γ_0 devrait être une solution de (13.4), on obtient

$$y'(t) = R_t^{t_0}\varphi(t).$$

Une solution particulière de cette équation est

$$y(t) = \int_{t_0}^t R_s^{t_0}\varphi(s)\,\mathrm{d}s.$$

Donc

$$\gamma_0(t) = \int_{t_0}^t R_s^t\varphi(s)\,\mathrm{d}s.$$

La solution γ de (13.4) qui vérifie la condition initiale $\gamma(t_0) = x_0$ est donc

$$\gamma(t) = R_{t_0}^t x_0 + \int_{t_0}^t R_s^t\varphi(s)\,\mathrm{d}s.$$