SÉANCE 14 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON-LINÉAIRES

14.1. Théorème d'existence locale

Dans cette séance, on traite des équations différentielles générales. Plus précisément, on considère une équation différentielle de la forme

$$x'(t) = f(t, x(t)), \tag{14.1}$$

où f est une application continue d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$ vers $\mathbb{R}^d$.

Théorème 14.1 **(Cauchy-Lipschitz)**. — *On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant \lambda \|x - y\|$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}^d$ tels que (t, x) et (t, y) soient tous dans Ω. Alors pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'équation (14.1) *admette une unique solution γ sur $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ qui vérifie $\gamma(t_0) = x_0$.*

Démonstration. — La stratégorie est de choisir un espace Θ de courbes paramétrées et de construire une contraction $T : \Theta \to \Theta$ de la forme

$$T\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))\,\mathrm{d}s.$$

Il faut bien choisir des conditions de sorte que la courbe paramétrée $T\gamma$ reste encore dans l'espace Θ.

Sans perte de généralité, on peut choisir les normes sup sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^{d+1}$. Choisissons $R > 0$ tel que

$$\overline{B}((t_0, x_0), R) = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \|(t - t_0, x - x_0)\| \leqslant R\} \subset \Omega.$$

Soit

$$M = \sup_{t \in]t_0 - R, t_0 + R[} |f(t, x_0)| + \lambda R.$$

On choisit $\varepsilon < R$ assez petit de sorte que $\varepsilon M < R$. Soient $J = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ et Θ l'ensemble des courbes paramétrées $\gamma : J \to \mathbb{R}^d$ telles que $\gamma(t_0) = x_0$ et que

$$\|\gamma(t) - x_0\| \leqslant R, \quad t \in J.$$

On munit Θ de la métrique d de sorte que

$$d(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{t \in J} \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|.$$

C'est un espace métrique complet. En outre, on a

$$\begin{aligned}\|T\gamma(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))\, \mathrm{d}s \right\| \\ &\leqslant \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x_0)\, \mathrm{d}s \right\| + \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s)) - f(s, x_0)\, \mathrm{d}s \right\| \\ &\leqslant \varepsilon \sup_{s \in [t_0 - R, t_0 + R]} \|f(s, x_0)\| + \varepsilon \lambda R = \varepsilon M < R.\end{aligned}$$

On a donc $T\gamma \in \Theta$. En outre, on a

$$\|T\gamma_1(t) - T\gamma_2(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma_1(s)) - f(s, \gamma_2(s))\, \mathrm{d}s \right\| \leqslant \lambda |t - t_0| d(\gamma_1, \gamma_2).$$

Par récurrence on obtient

$$\|T^n\gamma_1(t) - T^n\gamma_2(t)\| \leqslant \frac{\lambda^n}{n!} |t - t_0|^n d(\gamma_1, \gamma_2).$$

On en déduit

$$d(T^n\gamma_1, T^n\gamma_2) \leqslant \frac{\lambda^n}{n!} \varepsilon^n d(\gamma_1, \gamma_2).$$

Donc T^n est une contraction lorsque n est assez grand. On en déduit que T possède un unique point fixe. □

Remarque 14.2. — (1) Si une application $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ vérifie les conditions dans le théorème, on dit que f est lipschitzienne par rapport à x. Si pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe un voisinage ouvert U de (t_0, x_0) dans Ω tel que la restriction de f à U soit lipschitzienne par rapport à x, on dit que l'application f est localement lipschitzienne par rapport à x. Le résultat du théorème étant local, le théorème est ainsi valable pour f localement lipschitzienne.

(2) L'unicité locale que l'on obtient dans le théorème implique en fait l'unicité globale : si $J \subset I$ sont deux intervalles ouverts et si γ_J et γ_I sont deux solutions de l'équation différentielle 14.1 qui coïncident en un point $t_0 \in J$, alors pour tout $t \in J$ on a $\gamma_J(t) = \gamma_I(t)$. Donc il existe un intervalle ouvert $I_{(t_0,x_0)} \subset I$ tel que l'équation (14.1) admette une solution γ sur $I_{(t_0,x_0)}$ qui vérifie la condition initiale $\gamma(t_0) = x_0$ et que cette solution ne puisse pas s'étendre en un intervalle contenant strictement $I_{(t_0,x_0)}$. Cette solution est appelée une solution maximale de condition initiale (t_0, x_0).