SÉANCE 2 : ÉTUDE LOCALE D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES

Dans cette séance, on étudie la dérivabilité/différentiabilité d'une fonction de plusieurs variables. Pour préparer l'étude des dérivées à l'ordre supérieur, on traite le cas des applications à valeurs dans un espace vectoriel normé.

2.1. Topologie d'un espace métrique

Définition 2.1. — Soit (M, d) un espace métrique. Si $x \in M$ et $\varepsilon > 0$ est un nombre strictement positif. On appelle *boule ouverte* centrée en x et de rayon ε le sous-ensemble $B(x; \varepsilon) := \{y \in M \,|\, d(x, y) < \varepsilon\}$. On dit qu'un sous-ensemble U de M est ouvert s'il peut s'écrire comme une réunion de boules ouvertes. On dit qu'un sous-ensemble F de M est fermé s'il est le complémentaire d'un sous-ensemble ouvert.

Lemme 2.2. — *Soit (M, d) un espace métrique. Un sous-ensemble U de M est ouvert si et seulement si, pour tout élément $x \in U$, l'ensemble U contient une boule ouverte centrée en x.*

Démonstration. — Soit $B(x; \varepsilon)$ une boule ouverte dans M et y un élément de $B(x; \varepsilon)$. Par définition on a $d(x, y) < \varepsilon$. Soit $\delta > 0$ tel que $d(x, y) + \delta < \varepsilon$. Montrons que la boule $B(y; \delta)$ est contenu dans $B(x; \varepsilon)$. En effet, pour tout $z \in B(y; \delta)$ on a

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \delta < \varepsilon.$$

"$\Longrightarrow$" : Soient U un sous-ensemble ouvert de M et x un point dans U. Comme U s'écrit comme une réunion de boule ouverte, il existe au moins une boule ouverte B telle que $x \in B \subset U$. L'argument au-dessus montre que B contient en fait une boule ouverte centrée en x.

"$\Longleftarrow$" : Pour tout $x \in U$, soit $B(x)$ une boule ouverte centrée en x qui est contenu dans U. On a évidemment $x \in B(x)$. Donc

$$U \subset \bigcup_{x \in U} B(x) \subset U,$$

d'où $U = \bigcup_{x\in U} B(x)$ est une réunion de boules ouvertes. □

Soient M un espace métrique et x un point dans M. On dit qu'un sous-ensemble V de M est un *voisinage* de x s'il contient une boule ouverte centrée en x. Avec cette terminologie, le lemme précédent peut être reformulé comme : un sous-ensemble U de M est ouvert si et seulement s'il est voisinage de tous ces points.

Proposition 2.3. — *Soit (M, d) un espace métrique.*

(1) Les sous-ensembles $\varnothing$ et M sont ouverts.

(2) L'intersection de deux sous-ensembles ouvert est encore ouvert.

(3) La réunion d'une famille de sous-ensembles ouverts est encore ouvert.

Démonstration. — (1) L'ensemble $\varnothing$ est une réunion dont l'ensemble des indices est vide. Si x est un point de M, alors $M = \bigcup_{r>0} B(x;r)$.

(2) Soient U_1 et U_2 deux sous-ensembles ouverts de M. Si x est un point de $U_1 \cap U_2$, alors il existe deux nombres strictement positifs r_1 et r_2 tels que $B(x;r_i) \subset U_i$ ($i \in \{1,2\}$). Soit $r = \min\{r_1, r_2\}$. On a $B(x;r) \subset U_1 \cap U_2$.

(3) Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles ouverts de M. Soit $U = \bigcup_{i\in I} U_i$. Pour tout $x \in U$, il existe $i \in I$ tel que $x \in U_i$. Donc il existe $r > 0$ tel que $B(x;r) \subset U_i \subset U$. □

2.2. Convergence et applications continues

Soient (M, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de M.

(1) On dit que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy si

$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{n,m\geqslant N} d(x_n, x_m) = 0.$$

(2) On dit que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers un élément $x \in M$ si[(2)]

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0.$$

Autrement dit, pour tout voisinage V de x, il existe un entier $N \geqslant 0$ tel que $x_n \in V$ quel que soit $n \geqslant N$.

Similairement à l'analyse sur l'ensemble $\mathbb{R}$, les propriétés suivantes sont vérifiées.

Proposition 2.4. — *Soient (M, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments dans M.*

(1) Si $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est un suite convergente, sa limite est unique.

(2) Si $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est un suite convergente, elle est une suite de Cauchy.

[(2)] On dit aussi que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite convergente dans M et que x est une limite de $(x_n)_{n\geqslant 0}$.

Démonstration. — (1) Soient x et y deux points de M qui sont des limites de $(x_n)_{n\geqslant 0}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $d(x,y) \leqslant d(x,x_n) + d(y,x_n)$, d'où

$$d(x,y) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \Big(d(x,x_n) + d(y,x_n) \Big) = 0.$$

Donc on a $d(x,y) = 0$ et donc $x = y$.

(2) Soit x la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$. Pour tout couple d'indices $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, on a $d(x_n,x_m) \leqslant d(x_n,x) + d(x_m,x)$. Donc pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sup_{n,m\geqslant N} d(x_n,x_m) \leqslant 2 \sup_{k\geqslant N} d(x_k,x).$$

Comme

$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{k\geqslant N} d(x_k,x) = \limsup_{k\to+\infty} d(x_k,x) = \lim_{k\to+\infty} d(x_k,x) = 0,$$

on obtient que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy. □

Définition 2.5. — Soient M et M' deux espaces métriques et $f : M \to M'$ une application. On dit que f est *continue* en $x \in M$ si, pour tout voisinage U de $f(x)$ dans M', l'image réciproque de U dans M est un voisinage de x. On dit que f est une application continue si elle est continue en tout point de M, autrement dit, l'image réciproque par f de tout sous-ensemble ouvert de M' est un sous-ensemble ouvert de M.

Proposition 2.6. — *Soient $f : M \to M'$ une application entre deux espaces métrique, et x un point de M. L'application f est continue en x si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge vers x, la suite $(f(x_n))_{n\geqslant 0}$ converge vers $f(x)$.*

Démonstration. — "$\Longrightarrow$" : On suppose que l'application f est continue en x. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite dans M qui converge vers x. Pour tout $\varepsilon > 0$, la boule ouverte $B(f(x);\varepsilon)$ est un voisinage de $f(x)$. Par conséquent, $f^{-1}(B(f(x);\varepsilon))$ est un voisinage de x, et donc contient une boule ouverte $B(x;\delta)$ centrée en x. Comme la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers x, il existe un entier $N \geqslant 0$ tel que $x_n \in B(x;\delta)$ pour tout $n \geqslant N$. On en déduit que $f(x_n) \in B(f(x);\varepsilon)$ pour tout $n \geqslant N$.

"$\Longleftarrow$" : On suppose que V est un voisinage de $f(x)$ tel que $f^{-1}(V)$ n'est pas un voisinage de x. Pour tout entier $n \geqslant 0$, il existe alors un élément $x_n \in B(x;1/n) \setminus f^{-1}(V)$. La suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers x et donc la suite $(f(x_n))_{n\geqslant 0}$ converge vers $f(x)$. Cependant, aucun des points $f(x_n)$ n'est dans l'ensemble V. Cela est absurde car V est un voisinage de $f(x)$. □

Corollaire 2.7. — *Soient V et W deux espace vectoriels normés et $f : V \to W$ une application linéaire. Alors f est une application continue si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|f(x)\| \leqslant C\|x\|$ quel que soit $x \in V$.*

Démonstration. — "$\Longleftarrow$" : Si $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite dans V qui converge vers un point x, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\|x_n-x\|=0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f(x_n)-f(x)\|=0$ car

$$\|f(x_n)-f(x)\|=\|f(x_n-x)\|\leqslant C\|x_n-x\|.$$

"$\Longrightarrow$" : Comme f est une application continue, l'image réciproque de $B(\mathbf{0};1)\subset W$ est un voisinage de $\mathbf{0}$. Donc il existe $\varepsilon>0$ tel que $B(\mathbf{0};\varepsilon)\subset\varphi^{-1}(B(\mathbf{0};1))$. On pose $C=2\varepsilon^{-1}$. Soient x un vecteur non-nul dans V et $y=(\varepsilon/2\|x\|)x$. On a $\|y\|=\varepsilon/2<\varepsilon$. Donc $\|f(y)\|<1$. Or $\|f(y)\|=(\varepsilon/2\|x\|)\|f(x)\|$. On obtient alors $\|f(x)\|<2\varepsilon^{-1}\|x\|=C\|x\|$. □

2.3. Fonctions différentiables

Soient V et W deux espaces vectoriels normés et a un point dans V. Soient U un voisinage ouvert de a et $f:U\to W$ une application. On dit que l'application f est *différentiable* en a s'il existe une application linéaire continue $Df(a):V\to W$ telle que

$$f(a+h)=f(a)+Df(a)(h)+o(\|h\|).$$

L'application linéaire $Df(a)$ est appelée la *différentielle* de f en a. En d'autre termes, on a

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)}{\|h\|}=0,$$

ou encore, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que

$$\|h\|<\delta\Longrightarrow\frac{\|f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)\|}{\|h\|}<\varepsilon.$$

Soit h un vecteur dans V. Si la fonction $t\mapsto(f(a+th)-f(a))/t$ admet une limite lorsque t tend vers 0, on dit que la fonction f est *dérivable* en x dans la direction de h. La limite

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+th)-f(a)}{t}$$

est notée comme $\partial_h f(a)$, appelée la *dérivée* de f en a dans la direction de h.

Remarque 2.8. — (1) La différentiabilité de f en a entraîne que l'application f est continue en a. En effet, si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite qui converge vers a, alors on a

$$f(a_n)=f(a)+Df(a)(a_n-a)+o(\|a_n-a\|).$$

Comme $Df(a)$ est une application continue, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}Df(a)(a_n-a)=0.$$

Donc on a $\lim\limits_{n\to+\infty}f(a_n)=f(a)$.

(2) Si la fonction f est différentiable en a, alors sa différentielle en a est unique. En effet, si $\varphi_i : V \to W$ sont deux applications linéaires continues telles que

$$f(a+h) = f(a) + \varphi_i(h) + o(\|h\|), \qquad i = 1, 2$$

tout $h \in V$, alors on a

$$(\varphi_1 - \varphi_2)(h) = o(\|h\|).$$

Comme $\varphi_1 - \varphi_2$ est une application linéaire, pour tout $h \in V$ fixé, on a

$$t(\varphi_1 - \varphi_2)(h) = (\varphi_1 - \varphi_2)(th) = o(\|th\|) = o(t).$$

On en déduit donc $(\varphi_1 - \varphi_2)(h) = 0$.

Exemple 2.9. — Soit a un point dans l'espace $\mathbb{R}^n$. On désigne par $(e_i)_{i=1}^n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit f une application d'un voisinage de a vers un espace vectoriel normé W. Si la fonction f est dérivable dans la direction de e_i, le vecteur $\partial_{e_i} f(a)$ (dans W) est noté comme $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, appelé la $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle de f.

Proposition 2.10. — *Soient V et W deux espaces vectoriels normés, x un point de V et f une application d'un voisinage de x vers W. Si l'application f est différentiable en x, alors elle est dérivable dans toute direction. En outre, pour tout $h \in V$ on a $Df(a)(h) = \partial_h f(a)$.*

Démonstration. — Soit h un élément de V. Comme f est différentiable en x, on a

$$f(a+th) = f(a) + Df(a)(th) + o(\|th\|) = f(a) + tDf(a)(h) + o(t).$$

Donc la fonction f est dérivable en a dans la direction de h, et on a $\partial_h f(a) = Df(a)(h)$. □

Les dérivées partielles ne suffisent pas pour décrire la différentiabilité d'une fonction de plusieurs variables. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie comme

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Si $h = (a,b)$ est un vecteur non-nul dans $\mathbb{R}^2$, on a

$$\partial_h f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(ta,tb)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{a^2 b}{t^2 a^4 + b^2} = \begin{cases} a^2/b, & b \neq 0, \\ 0, & b = 0. \end{cases}$$

En particulier, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Cependant, f n'est pas différentiable en $(0,0)$ car elle n'est pas continue en $(0,0)$ (la suite $\big(f(1/n, 1/n^2)\big)_{n \geqslant 1}$ converge vers $1/2$).

On finit cette séance par une formule que calcule la différentielle d'une application composée.

Théorème 2.11. — *Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés. Soit a un point de E, U un voisinage de a dans E et $f : U \to F$ une application. Soit en outre g une application définie sur un voisinage ouvert de $f(a)$ et à valeur dans G. On suppose que l'application f est différentiable en a et que l'application g est différentiable en $f(a)$. Alors l'application composée $g \circ f$ est bien définie dans un voisinage de a, et la relation suivante est vérifiée*

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

Démonstration. — Soit A le domaine de définition de l'application g. Comme l'application f est différentiable en a, elle est continue en a. Par conséquent, $f^{-1}(A)$ est un voisinage de a et il en est de même de $f^{-1}(A) \cap U$, où l'application composée $g \circ f$ est bien définie.

Pour tout $h \in E$ tel que $\|a\|$ soit assez petit, on a

$$g(f(a+h)) = g(f(a)) + Dg(f(a))(f(a+h) - f(a)) + o(\|f(a+h) - f(a)\|).$$

En outre

$$f(a+h) - f(a) = Df(a)(h) + o(\|h\|).$$

En particulier, on a $\|f(a+h) - f(a)\| = O(\|h\|)$. Donc

$$g(f(a+h)) = g(f(a)) + Dg(f(a))(Df(a)(h)) + o(\|h\|).$$

$\square$