SÉANCE 3 : ÉTUDE APPROFONDIE DE LA TOPOLOGIE

3.1. Parties fermées

Soit (M, d) un espace métrique. On dit qu'une partie F de M est fermé si son complémentaire dans M est une partie ouverte. Par définition, si x est un point en dehors d'une partie fermée F, alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\inf_{y \in F} d(x, y) \geqslant \varepsilon$.

Rappelons que les parties ouvertes de M vérifie les propriétés (axiomes d'une topologie) suivantes:

(1) Les sous-ensembles $\varnothing$ et M sont ouverts.
(2) L'intersection de deux sous-ensembles ouverts est encore ouverte.
(3) La réunion d'une famille de sous-ensembles ouverts est encore ouverte.

On en déduit aisément les propriétés correspondante des parties fermées:

(1) Les sous-ensembles $\varnothing$ et M sont fermés.
(2) La réunion de deux sous-ensembles fermés est encore fermée.
(3) L'intersection d'une famille de sous-ensembles fermés est encore fermée.

Proposition 3.1. — *Soient M un espace métrique et F une partie fermée de M. Si $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite dans F qui converge vers un point $x \in M$, alors on a $x \in F$.*

Démonstration. — Supposons que $x \in F$, il exite alors une boule ouverte $B(x; \varepsilon)$ qui ne rencontre pas F. Cela est absurde car x est la limite d'une suite dans F. □

La réciproque de la proposition précédente est aussi vraie.

Proposition 3.2. — *Soient M un espace métrique et F une partie de M. On suppose que toute suite dans F qui converge dans M admet sa limite dans F. Alors F est une partie fermée de M.*

Démonstration. — Supposons le contraire. Il existe alors un élément x de $M \setminus F$ tel que tout voisinage de x contienne au moins un élément de F. On peut alors construire une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ dans F telle que $d(x_n,x)\leqslant 1/n$. Cette suite converge vers x. On a alors $x\in F$, qui conduit à une contradiction. □

Proposition 3.3. — *Soit $f : M\to M'$ une application entre des espaces métriques. Le conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) f est une application continue;
(2) pour toute partie ouverte U de M', $f^{-1}(U)$ est une partie ouverte de M;
(3) pour toute partie fermée F de M', $f^{-1}(F)$ est une partie fermée de M.

Démonstration. — Nous avons déjà vu l'équivalence de (1) et (2) dans la séance précédente. L'équivalence de (2) et (3) provient du fait que $f^{-1}(A^c)=f^{-1}(A)^c$ quel que soit une partie A de M'. □

3.2. Intérieur, adhérence

Soient M un espace métrique et A un sous-ensemble de M. On appelle l'*intérieur* de A la réunion de tous les sous-ensembles ouverts de M qui sont contenus dans A, noté comme A°. On appelle l'*adhérence* de A l'intersection de tous les sous-ensembles fermés de M qui contiennent A, noté comme $\bar{A}$. On observe immédiatement que A° est le plus grand sous-ensemble ouvert de M qui est contenu dans A et que $\bar{A}$ est le plus petit sous-ensemble fermé qui contient A. Tout élément de A° (resp. $\bar{A}$) est appelé un point intérieur (resp. adhérent) de A.

Proposition 3.4. — *Soient M un espace métrique et A un sous-ensemble de M. Les relations suivantes sont vérifiées:*

$$\overline{A^c}=(A^\circ)^c,\quad \bar{A}^c=(A^c)^\circ$$

Démonstration. — On a

$$(A^\circ)^c=\Big(\bigcup_{\substack{U\subset A\\ U\text{ ouvert}}}U\Big)^c=\bigcap_{\substack{U^c\supset A^c\\ U^c\text{ fermé}}}U^c=\overline{A^c}.$$

Si on applique la première égalité à A^c, on obtient la deuxième en prenant le complémentaire. □

Proposition 3.5. — *Soient M un espace métrique et A un sous-ensemble de M.*

(1) A° s'identifie à l'ensemble des points $x\in M$ tel que A soit un voisinage de x.
(2) $\bar{A}$ s'identifie à l'ensemble des points $x\in M$ qui s'écrit comme la limite d'une suite dans A.

Démonstration. — (1) Pour tout $x\in A^\circ$, l'ensemble A est un voisinage de x car il contient A° qui est un ouvert contenant x. Réciproquement, si $x\in M$ est tel que A soit un voisiange de x, alors il existe $\varepsilon>0$ tel que $B(x;\varepsilon)\subset A$. Donc on a $x\in B(x;\varepsilon)\subset A^\circ$ par définition.

(2) Comme $\bar{A}$ est un fermé qui contient A, on obtient (d'après la proposition 3.1) que la limite d'une suite dans A appartient à $\bar{A}$. Réciproquement, si x est un élément de $\bar{A}$, alors il n'est pas dans $(A^c)^\circ$ (d'après la proposition 3.4). En particulier, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un élément $x_n \in B(x; 1/n) \cap A$. La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est dans A et converge vers x. □

3.3. Limite d'une fonction en un point

Soient M un espace métrique, A un sous-ensemble de M et f une application de A vers un autre espace métrique M'. Soient x un point de M et y un point de M'. On dit que y est une *limite* de l'application f en x si les condition suivantes sont satisfaite :

(1) x est un point adhérent de $A \setminus \{x\}$,
(2) pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ dans $A \setminus \{x\}$ qui converge vers x, la suite $(f(x_n))_{n\geqslant 0}$ converge vers y.

Remarque 3.6. — (i) D'après la proposition 3.5, la condition (1) revient à dire qu'il existe au moins une suite dans $A\setminus\{x\}$ qui converge vers x. Par conséquent, si la limite de l'application f en x existe, alors elle est unique.

(ii) La condition (2) est équivalente à la condition suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que
$$\forall\, x' \in A \setminus \{x\}, \quad d(x', x) < \delta \Longrightarrow d(f(x'), y) < \varepsilon.$$

Soient M un espace métrique et A un sous-ensemble de M. Soit f une application de A vers un autre espace métrique M'. Si l'application f possède une limite y en un point $x \in A^c$, alors on peut étendre le domaine de définition de f en $A \cup \{x\}$ en prenant y comme la valeur de la fonction étendue en x. Par définition, la fonction étendue est continue en x. On l'appelle le prolongement de la fonction f en x par continuité.

Exemple 3.7. — La fonction $f(x) = \sin(x)/x$ est bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Cependant, elle possède une limite en 0. Donc on peut prolonger le domaine de définition de la fonction f en $\mathbb{R}$ par continuité. La fonction étendue est de la forme
$$x \longmapsto \begin{cases} \sin(x)/x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$