SÉANCE 4 : ESPACES COMPLETS, ESPACES COMPACTS

4.1. Espaces complets

Soit (M, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ dans M est une suite de Cauchy si la condition suivante est vérifiée :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n, m \geqslant N,\ d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

En d'autre terme, $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy si et seulement si

$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{n,m\geqslant N} d(x_n, x_m) = 0.$$

On dit que (M, d) est un espace complet si toute suite de Cauchy dans M est convergente.

Lemme 4.1. — *Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de Cauchy dans un espace métrique. Si une sous-suite de $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers un point x, alors il en est de même de $(x_n)_{n\geqslant 0}$.*

Démonstration. — Soit $(x_{n_i})_{i\geqslant 0}$ une sous-suite de $(x_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge vers x, où $(n_i)_{i\geqslant 0}$ est une suite strictement croissante d'indices. Comme $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy, on a $\lim_{k\to+\infty} d(x_k, x_{n_k}) = 0$. Donc la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers x. $\square$

Convention. — *Dans ce cours, on convient que l'espace $\mathbb{R}$ des nombres réels est complet. On en déduit facilement que l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de sa norme canonique est un espace complet (Exercice).*

4.2. Espaces compacts

Soient (M, d) un espace métrique et F un sous-ensemble de M. On dit qu'une famille de sous-ensembles ouverts $(U_i)_{i\in I}$ de M est un recouvrement ouvert de F si $\bigcup_{i\in I} U_i \supset F$. Si $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de F et si J est un sous-ensemble de I tel que $\bigcup_{i\in J} U_i \supset F$, on dit que $(U_j)_{j\in J}$ est un sous-recouvrement de $(U_i)_{i\in I}$. Si de plus J est un ensemble fini, on dit que $(U_j)_{j\in J}$ est un sous-recouvrement fini de

$(U_i)_{i\in I}$. On dit que le sous-ensemble F est *compact* si tout recouvrement ouvert de F admet un sous-recouvrement fini.

Proposition 4.2. — *Soit $\varphi : M \to M'$ une application continue d'espaces métriques. Si F est un sous-ensemble compact de M, alors l'image de F est un sous-ensemble compact de M'.*

Démonstration. — Soit $(V_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $\varphi(F)$. Comme φ est continue, $(\varphi^{-1}(V_i))_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de F, qui admet un sous-recouvrement fini $(\varphi^{-1}(V_j))_{j\in J}$ car F est compact, où J est une partie finie de I. L'ensemble $\varphi(F)$ est alors recouvert par $(V_j)_{j\in J}$. Par conséquent, $\varphi(F)$ est compact. □

Soit (M, d) un espace métrique. On dit que (M, d) est *séquentiellement compact* si toute suite dans (M, d) admet une sous-suite convergente.

Soient (M, d) un espace métrique et R un sous-ensemble de M. Soit $\varepsilon > 0$. On dit que R est un ε-réseau si $(B(x;\varepsilon))_{x\in R}$ est un recouvrement ouvert de M.

Théorème 4.3. — *Soit (M, d) un espace métrique. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) M est compact,

(2) M est complet et pour tout $\varepsilon > 0$, M admet un ε-réseau fini.

(3) M est séquentiellement compact.

Démonstration. — (1)⇒(3) : Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite dans M. Si aucune sous-suite de $(x_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas, alors $S = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble infini. En outre, pour tout $x \in M$, il existe un ouvert U_x contenant x tel que $U_x \cap S$ soit un ensemble fini. Les $(U_x)_{x\in M}$ forment un recouvrement de M qui adment un sous-recouvrement fini. Cela montre que S est un ensemble fini, qui conduit à une contradiction.

(3)⇒(2) : Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de Cauchy. Elle admet une sous-suite convergente, donc elle est convergente elle-même (d'après le lemme 4.1). Cela montre que M est complet. Soit $\varepsilon > 0$. Si M n'admet pas de ε-réseau fini, alors on peut construire par récurrence une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ tel que $x_n \notin \bigcup_{0\leqslant i<n} B(x_i, \varepsilon)$. En particulier, aucune des sous-suite de $(x_n)_{n\geqslant 0}$ n'est une suite de Cauchy, qui conduit à une contradiction.

(2)⇒(1) : Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de M. On suppose que $(U_i)_{i\in I}$ n'a pas de sous-recouvrement fini. Considérons une suite croissante de parties finies de M

$$R_0 \subset R_1 \subset \cdots$$

telle que R_n soit un 2^{-n}-réseau de M. On peut construire par récurrénce une suite d'éléments $(x_n)_{n\geqslant 0}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) pour tout $n \geqslant 0$, on a $x_n \in R_n$,

(ii) pour tout $n \geqslant 1$, on a $x_n \in B(x_{n-1}, 2^{2-n})$,

(iii) la boule $B(x_n, 1/2^n)$ n'est pas recouvert par un nombre fini d'ouverts dans $(U_i)_{i\in I}$.

La suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est alors un suite de Cauchy qui converge vers un point $x \in M$ (car M est complet). Il existe alors un U_i qui contient x. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(x;\varepsilon) \subset U$ et $n \geqslant 0$ un entier tel que $x_n \in B(x;\varepsilon/2)$ et que $2^{-n} < \varepsilon/2$. On a $B(x_n, 1/2^n) \subset B(x,\varepsilon) \subset U_i$, qui conduit à une contradiction. □

Corollaire 4.4. — *Soient M un espace métrique et F une partie compacte de M. Alors F est une partie fermée.*

Démonstration. — Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite dans F qui converge vers un point $x \in M$. C'est alors une suite de Cauchy dans F. Comme F est compact, il est complet. On en déduit alors que $x \in F$. □

Proposition 4.5. — *Soient (M, d) un espace métrique et F une partie fermée de M. Si M est complet (resp. compact), alors il en est de même de F.*

Démonstration. — (1) Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de Cauchy dans F. Elle est aussi une suite de Cauchy dans M. Comme M est complet, on obtient que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite convergente. En outre, comme F est fermé, la limite de $(x_n)_{n\geqslant 0}$ appartient à F. Donc F est un espace complet.

(2) Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite dans F. Comme M est séquentiellement compact, il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge dans M. En outre, la limite de cette sous-suite est dans F car F est fermé. Par conséquent, F est séquentiellement compact, et donc est compact. □

Exemple 4.6. — 1) Soient M un espace métrique, $x \in M$ et $\varepsilon > 0$. On appelle la boule fermée centrée en x le sous-ensemble $\overline{B}(x;\varepsilon) := \{y \in M \,:\, d(y, x) \leqslant \varepsilon\}$ de M. Si z est un point dans $M \setminus \overline{B}(x;\varepsilon)$. On a $d(z, x) > \varepsilon$ et donc il existe un $\delta > 0$ tel que $d(z, x) > \varepsilon + \delta$. On en déduit que $B(z, \delta) \cap \overline{B}(x;\varepsilon) = \varnothing$. Cela montre que $\overline{B}(x;\varepsilon)$ est une partie fermée de M. En outre, le cercle $S(x;\varepsilon) := \overline{B}(x;\varepsilon) \setminus B(x;\varepsilon)$ est également une partie fermée de M.

2) Soient M un espace métrique et C une partie compacte de M. Alors pour tout $x \in M$ la fonction $(y \in C) \mapsto d(x, y)$ est bornée (on dit alors que la partie C est bornée). En effet, si C n'est pas borné, alors il existe $x \in M$ et une suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ dans C tels que $d(x, y_n)$ tend vers l'infini lorsque $n \to +\infty$. La suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ ne peux pas avoir de sous-suite convergente.

3) Soit I un intervalle fermé dans $\mathbb{R}$. Il est une partie fermée de $\mathbb{R}$, donc est complet. En outre, pour tout $\varepsilon > 0$, il est facile de construire un ε-réseau fini dans I. On obtient donc que I est une partie compacte. On en déduit que les parties compactes de I sont précisément les parties bornées et fermées.

4) Soit $d \geqslant 1$ un entier. Soit $\|.\|_\infty$ la norme sur $\mathbb{R}^d$ telle que

$$\|(x_1, \ldots, x_d)\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_d|).$$

Donc une suite $(\boldsymbol{x}^{(n)})_{n\geqslant 0}$ converge vers $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_k^{(n)} = x_k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, d\}$. En particulier, pour tout $a > 0$, la boule fermée

$$\overline{B}(\mathbf{0}; a) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \,:\, \|x\|_\infty \leqslant a\} = \overline{B}(0, a)^d$$

est une partie compacte de $(\mathbb{R}^d, \|.\|_\infty)$. On en déduit que toute partie fermée et bornée de $(\mathbb{R}^d, \|.\|_\infty)$ est compacte.

Théorème 4.7. — *Soit $d \geqslant 1$ un entier. Soient $\|.\|$ et $\|.\|'$ deux normes sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$. Il existe une constante $C > 0$ telle que $C^{-1}\|.\| \leqslant \|.\|' \leqslant C\|.\|$. En outre, tout sous-ensemble U de $\mathbb{R}^d$ est ouvert par rapport à $\|.\|$ si et seulement s'il ouvert par rapport à $\|.\|'$.*

Démonstration. — Sans perte de généralité, on peut supposer que $\|.\|' = \|.\|_\infty$. Soit $(e_i)_{i=1}^d$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_d e_d\| \leqslant \sum_{i=1}^d |\lambda_i| \cdot \|e_i\| \leqslant \|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_d e_d\|_\infty \sum_{i=1}^d \|e_i\|.$$

Cela montre en outre que l'application linéaire $\mathrm{Id} : (\mathbb{R}^d, \|.\|_\infty) \to (\mathbb{R}^d, \|.\|)$ est continue. Comme le cercle unité fermée de $(\mathbb{R}^d, \|.\|_\infty)$ est compacte, elle est une partie compacte de $(\mathbb{R}^d, \|.\|)$ (car elle est l'image d'une partie compacte par une application continue). Donc elle est une partie bornée dans $(\mathbb{R}^d, \|.\|)$. On en déduit donc

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^d,\, \|y\|_\infty=1} \|y\| < +\infty.$$

La première assertion est donc démontrée. La deuxième assertion s'en déduit. On laisse les détails comme un exercice (fait au cours). □

Le théorème précédent montre que toutes les normes sur un espace vectoriel E de rang fini sur $\mathbb{R}$ sont équivalentes. On peut alors parler les parties ouvertes/fermées/compactes de E sans faire la référence à une norme sur E. En outre, la continuité/différentiabilité d'une application d'un ouvert U de E vers un espace vectoriel normé ne dépend pas du choix de la norme sur E. Cette propriété est particulièrement commode pour l'étude des fonctions définies sur un ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie. Par exemple, on a le résultat suivant

Proposition 4.8. — *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E vers F est continue (et donc différentiable).*

Démonstration. — Sans perte de généralité, on peut supposer que $E = \mathbb{R}^d$ et que la norme sur E est $\|.\|_\infty$. Soit $(e_i)_{i=1}^d$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Si $f : E \to F$ est une application linéaire et si $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r$ est un élément de E, on a

$$\|f(x)\| = \Big\| \sum_{i=1}^{d} \lambda_i f(e_i) \Big\| \leqslant \sum_{i=1}^{d} |\lambda_i| \cdot \|f(e_i)\| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{d} \|f(e_i)\| \Big) \|x\|_\infty.$$

□

4.3. Application dans l'étude des fonctions différentiables

Soient E un espace vectoriel de rang fini sur $\mathbb{R}$. On fix une base $(e_i)_{i=1}^d$ de E. Pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, on désigne par $e_i^\vee$ l'application linéaire de E vers $\mathbb{R}$ qui envoie $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_d e_d$ en λ_i.

Théorème 4.9. — *Soit f une fonction définie sur un ouvert non-vide U de E. On suppose que, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, la dérivée partielle $\partial_{e_i} f$ existe et définit une fonction continue sur U. Alors la fonction f est de classe C^1 et on a*

$$Df(\cdot) = \sum_{i=1}^{d} \partial_{e_i} f(\cdot) e_i^\vee$$

Démonstration. — Sans perte de généralité, on suppose que E est muni de la norme $\|.\|$ telle que $\|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_d e_d\| := \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_d|\}$. Soit h un vecteur dans E de la forme $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_d e_d$. Soit a un élément de U. On a

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{d} f(a + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_i e_i) - f(a + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{i-1} e_{i-1}).$$

D'après le théorème d'accroissement fini, il existe un nombre $\xi_i \in]0,1[$ tel que

$$\begin{aligned} & f(a + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_i e_i) - f(a + \lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_{i-1} e_{i-1}) \\ &= \lambda_i \partial_{e_i}(f)(a + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{i-1} e_{i-1}) = \lambda_i \big(\partial_{e_i} f(a) + o(1) \big) \end{aligned}$$

lorsque $\|h\| \to 0$. Par conséquent, on a

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \partial_{e_i} f(a) + o(\|h\|),$$

d'où le résultat souhaité. □

Exemple 4.10. — Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie comme $f(x,y) = x^2 + y^2$. On a $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$. Ce sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$. On en déduit donc que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et que la différentielle de f est de la forme

$$Df(x,y) = 2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y,$$

où $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ désignent les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définies par les projection en les deux coordonnées respectivement.

Proposition 4.11. — *Soient F un espace vectoriel normé et $(f_i)_{i=1}^d$ une famille de fonctions continues (resp. différentiables, dérivable dans une direction $h \in F$) définies sur un ouvert non-vide V de F, alors la fonction $f : V \to E$ définie comme*

$$(x \in V) \longmapsto f_1(x)e_1 + \cdots + f_d(x)e_d$$

est continue (resp. différentiable, dérivable dans la direction h).

Démonstration. — Sans perte de généralité, on peut supposer que la norme sur E satisfait à la relation $\|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_d e_d\| = \max(|\lambda_1|, \ldots |\lambda_d|)$. On a alors

$$\|f(x+h) - f(x)\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant d} |f_i(x+h) - f_i(x)|.$$

Donc f est continue dès que les f_i sont continues. De même, si les f_i sont différentiables, alors on a

$$\left\| f(x+h) - f(x) - \sum_{i=1}^d Df_i(x)(h)e_i \right\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant d} |f_i(x+h) - f_i(x) - Df_i(x)(h)|.$$

Donc f est différentiable en x et on a $Df(x) = \sum_{i=1}^d Df_i(x)e_i$. La démonstration du troisième énoncé est similaire, on la laisse comme un exercice. □

Corollaire 4.12. — *Soient F un espace vectoriel normé et $(f_i)_{i=1}^d$ une famille de fonctions définies sur un ouvert non-vide V de F. Soit $f : V \to E$ la fonction définie comme $(x \in V) \longmapsto f_1(x)e_1 + \cdots + f_d(x)e_d$. Soit g une fonction définie sur un voisinage de $f(x)$ est à valeur dans un autre espace vectoriel normé G. Si la fonction f est dérivable en $x \in V$ dans la direction de $h \in F$ est si la fonction g est différentiable en $f(x)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en x dans la direction de h. En outre, on a*

$$\partial_h(g \circ f)(x) = \sum_{i=1}^d \partial_h f_i(x) \partial_{e_i} g(f(x)).$$

Démonstration. — Comme la fonction g est différentiable en $f(x)$, elle est continue en $f(x)$. Donc la fonction composée $g \circ f$ est bien définie dans un voisinage de x. En outre, pour $t \in \mathbb{R}$ dont la valeur absolue est suffisamment petite, on a

$$(g \circ f)(x+th) - g(f(x)) = g(f(x) + (f(x+th) - f(x))) - g(f(x))$$
$$= Dg(f(x))(f(x+th) - f(x)) + o(\|f(x+th) - f(x)\|)$$

Comme f est dérivable en x dans la direction de h, on a

$$f(x+th) - f(x) = t\partial_h f(x) + o(|t|) = \sum_{i=1}^d t\partial_h f_i(x)e_i + o(|t|).$$

Par conséquent, $(g \circ f)(x+th) - g(f(x)) = t\sum_{i=1}^d \partial_h f_i(x)\partial_{e_i} g(f(x)) + o(|t|)$. □