# SÉANCE 8 : INTÉGRATION DES FONCTIONS SIMPLES

Cette séance est consacrée à la théorie d'intégration pour les fonctions en plusieurs variables. On va définir un opérateur linéaire $h \mapsto \int h(x)\,\mathrm{d}x$ de certain espace de fonctions réelles sur $\mathbb{R}^d$ vers $\mathbb{R}$.

## 8.1. Fonction indicatrice, fonction simple

Soit $A$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$. On désigne par $\mathbb{1}_A$ l'application de $\mathbb{R}^d$ vers $\mathbb{R}$ qui envoie $x$ en 1 si $x \in A$ et en 0 sinon. La fonction $\mathbb{1}_A$ est appelée la fonction indicatrice de $A$.

Soit $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_d)$ et $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_d)$ deux éléments de $(\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\})^d$. On désigne par $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ l'ensemble des points $(x_1, \ldots, x_d)$ de $\mathbb{R}^d$ tels que $a_i \leqslant x_i < b_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$. Cet ensemble est appelé un *pavé* délimité par $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$. Attention, dans le cas $d = 1$, l'expression $[-\infty, b[$ désigne en fait l'intervalle infini $]-\infty, b[$ avec la notation usuelle. On appelle *fonction simple* toute combinaison linéaire de fonctions indicatrices des pavés.

Les propriétés suivantes des pavés sont facile à démontrées.

(1) $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ est non-vide si et seulement si $a_i < b_i$ quel que soit $i \in \{1, \ldots, d\}$.

(2) Si $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ et $[\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}'[$ sont deux pavés, alors $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[\cap[\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}'[= [\max(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \min(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}')[$, où pour tous les $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ et $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_d)$ dans $(\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})^d$,

$$\min(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := (\min(x_1, y_1), \ldots, \min(x_d, y_d)),$$
$$\max(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := (\max(x_1, y_1), \ldots, \max(x_d, y_d)).$$

Pour chaque $i \in \{1, \ldots, d\}$ on se donne un sous-ensemble fini $H_i$ de $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ordonné comme $-\infty = x_i^{(0)} < x_i^{(1)} < \ldots < x_i^{(n_i)} = +\infty$. Soit $\Theta = \Theta(H_1, \ldots, H_d)$ l'ensemble des pavés de la forme $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$, où $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_d)$ et $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_d)$ sont choisis de sorte que, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, il existe $j \in \{0, \ldots, n_i - 1\}$ avec $a_i = x_i^{(j)}$ et $b_i = x_i^{(j+1)}$. Alors l'enesmble $\mathbb{R}^d$ s'écrit comme la réunion disjointe des pavés dans

$\Theta$. En effet, pour tout point $(y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, chaque coordonnée $y_i$ se trouve dans un et un unique intervalle de la forme $[x_i^{(j)}, x_i^{(j+1)}[$. En particulier, le complémentaire d'un pavé $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ s'écrit comme la réunion dijointe d'un nombre fini de pavés.

***Remarque 8.1***. — Soit $\mathcal{P}$ une famille finie de pavés. On suppose que chaque pavé $P$ dans la famille est délimité par deux points $\boldsymbol{a}_P$ et $\boldsymbol{b}_P$. Soit $\mathcal{E}_{\mathcal{P}} = \{\boldsymbol{a}_P, \boldsymbol{b}_P \mid P \in \mathcal{P}\}$ l'ensemble des extrémités des pavés dans $\mathcal{P}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, soit $H_i$ l'image de $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$ par la $i^{\text{ème}}$ projection. On construit la famille de pavés $\Theta$ comme ci-dessus. Il s'avère que tout pavé dans $\mathcal{P}$ s'écrit comme une réuion disjointe de pavés dans $\Theta$.

***Définition 8.2***. — On appelle *fonction simple* toute fonction sur $\mathbb{R}^d$ qui s'écrit comme une combinaison linéaire de fonctions indicatrices de pavés. D'après la remarque précédente, toute fonction simple s'écrit comme une combinaison linéaire de fonctions indicatrices de pavés disjoints. En particulier, si $f$ est une fonction simple, alors il en est de même de $|f|$.

### 8.2. Intégration d'une fonction simple

Soit $1\!\!1_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}[}$ la fonction d'indicatrice d'un pavé. On définit

$$\int_{\mathbb{R}^d} 1\!\!1_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}[}(x)\,\mathrm{d}x := \prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Si

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1\!\!1_{A_i}$$

est une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions indicatrices de pavés, on définit

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_{\mathbb{R}^d} 1\!\!1_{A_i}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8.1}$$

***Exercice 8.3***. — Montrer que la définition (8.1) ne dépend pas du choix de la combinaison linéaire qui exprime la fonction $f$. On peut utiliser la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

On voit aussitôt de la définition que, si $f$ et $g$ sont deux fonctions positives simples, alors on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8.2}$$

En outre, si $f$ et $g$ sont deux fonctions positives simples qui vérifient $f \leqslant g$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

***Théorème 8.4.*** — *Soient $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite croissante de fonctions simples positives qui converge vers une fonction simple. On a*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

***Définition 8.5.*** — On dit qu'une fonction simple $f$ est *intégrable* si

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Il s'avère que toute fonction simple intégrable $f$ s'écrit comme la différence de deux fonctions positives simples $f_1$ et $f_2$ telles que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_i(x)\,\mathrm{d}x < +\infty \qquad (i=1,2).$$

On définit

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^d} f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cette définition ne dépend pas du choix du couple $(f_1,f_2)$. On désigne par $L^1_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions simples intégrables sur $\mathbb{R}^d$. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et l'application de $L^1_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^d)$ vers $\mathbb{R}$ qui envoie $f$ en $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x$ est une application linéaire.