SÉANCE 9-10 : FONCTIONS INTÉGRABLES

9.1. Application d'intégration

Soient M un ensemble non-vide et S un espace vectoriel de fonctions réelles sur M. On dit que S est filtrant si pour tout couple (f, g) de fonctions dans S, on a $\min(f, g) \in S$.

Si S est un espace vectoriel filtrant de fonctions sur M, alors pour tout couple (f, g) de fonctions dans S, on a $\max(f, g) \in S$. En effet, on a $\max(f, g) = f + g - \min(f, g)$.

Exemple 9.1. — Soit $d \geqslant 1$ un entier. Soit $L^1_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions simples intégrable sur $\mathbb{R}^d$. C'est un espace vectoriel filtrant de fonctions sur $\mathbb{R}^d$.

Définition 9.2. — Soient M un ensemble non-vide et S un espace vectoriel filtrant de fonctions sur M. On appelle *application d'intégration* sur S toute application linéaire $\int$ de S vers $\mathbb{R}$ qui envoie toute fonction positive en un nombre positif, et telle que, pour toute suite décroissante $(f_n)_{n\geqslant 1}$ dans S qui converge vers 0, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n = 0.$$

Exemple 9.3. — Le théorème 8.4 montre que $\int \mathrm{d}x$ est une application d'intégration sur le $L^1_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 9.4. — *Soient M un ensemble non-vide, S un espace vectoriel filtrant de fonctions sur M et $\int : S \to \mathbb{R}$ une application d'intégration sur S. Si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante de fonctions dans S telle que $f = \sup_{n\geqslant 0} f_n \in S$, alors on a $\int f = \sup_{n\geqslant 0} \int f_n$.*

Démonstration. — La suite $(f - f_n)_{n\geqslant 0}$ dans S est décroissante et converge vers 0. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int f - f_n = 0,$$

d'où

$$\sup_{n\geqslant 0}\int f_n = \lim_{n\to+\infty}\int f_n = \int f.$$

□

9.2. Prolongement d'une application d'intégration

Soient M un ensemble non-vide et S un espace vectoriel filtrant de fonctions sur M. On désigne par $S_\uparrow$ l'ensemble de fonctions sur M (à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$) qui s'écrivent comme la limite d'une suite croissante de fonctions dans S.

Lemme 9.5. — *Soient $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite dans S et f un élément de S. Si $f \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$, alors on a*

$$\int f \leqslant \lim_{n\to+\infty}\int f_n.$$

Démonstration. — Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, soit $g_n=\min(f_n,f)$. La suite $(g_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et converge vers f. On a alors

$$\int f = \lim_{n\to+\infty}\int g_n \leqslant \lim_{n\to+\infty}\int f_n.$$

□

Proposition 9.6. — *Si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ et $(g_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites croissantes dans S telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} g_n$. Alors on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\int f_n \leqslant \lim_{n\to+\infty}\int g_n.$$

Démonstration. — Pour tout entier m on a $g_m \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$. Par le lemme précédent, on a

$$\int g_m \leqslant \lim_{n\to+\infty}\int f_n.$$

Par passage à la limite quand $m\to+\infty$, on obtient le résultat souhaité. □

La proposition précédente permet d'étendre $\int$ en une application de $S_\uparrow$ vers $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$: si f est une fonction dans $S_\uparrow$, on définit

$$\int f = \lim_{n\to+\infty}\int f_n,$$

où $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante dans S qui convergent vers f. Cette définition ne depend pas du choix de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$. On vérifie facilement les propriétés suivantes.

(1) L'ensemble $S_\uparrow$ est stable par l'addition. En outre, si f et g sont deux fonctions dans $S_\uparrow$, alors on a $\int f+g=\int f+\int g$.
(2) L'ensemble $S_\uparrow$ est stable par la dilatation par un scalaire positif. En outre, si f est une fonction dans $S_\uparrow$ et si $\lambda\geqslant 0$ est un nombre réel, alors $\int \lambda f=\lambda\int f$.

(3) Si f et g sont deux éléments dans $S_\uparrow$ tels que $f \leqslant g$, alors on a $\int f \leqslant \int g$.
(4) Si f et g sont deux éléments dans $S_\uparrow$, alors $\min(f,g)$ et $\max(f,g)$ sont aussi dans $S_\uparrow$.

Proposition 9.7. — *Si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante de fonctions dans $S_\uparrow$, alors $f = \sup_{n\geqslant 0} f_n \in S_\uparrow$. En outre, on a $\int f = \sup_{n\geqslant 0}\int f_n$.*

Démonstration. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $(g_{n,m})_{m\geqslant 0}$ une suite d'applications dans S qui converge vers f_n. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit $h_m = \max(g_{1,m}, \ldots, g_{m,m})$. C'est un élément dans S. En outre, on a $f_m \geqslant h_m \geqslant g_{n,m}$ pour $m \geqslant n$. Donc $f = \sup_{m\geqslant 0} h_m$. On a alors

$$\int f = \sup_{m\geqslant 0}\int h_m \leqslant \sup_{m\geqslant 0}\int f_m.$$

Le théorème est ainsi démontré. □

On désigne par $S_\downarrow$ l'ensemble des applications de M vers $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ qui s'écrivent comme la limite d'une suite décroissante dans S. On a $S_\downarrow = \{-f \mid f \in S_\uparrow\}$. De façon similaire, on peut montrer que l'ensemble $S_\downarrow$ est stable par l'addition, la dilatation par un scalaire positif et la limite décroissante. L'application $\int$ se prolonge en une application de $S_\downarrow$ vers $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ qui préserve l'addition et la multiplication par un scalaire positif, et tel que, pour toute suite décroissante $(g_n)_{n\geqslant 0}$ dans $S_\downarrow$, on a

$$\int \lim_{n\to+\infty} g_n = \lim_{n\to+\infty}\int g_n = \inf_{n\geqslant 0}\int g_n.$$

9.3. Fonction intégrable

Soient M un ensemble non-vide, S un espace vectoriel filtrant de fonctions sur M. On désigne par $\overline{L}^1(S,\int)$ l'ensemble des fonctions f sur M telle que

$$\sup_{g\in S_\downarrow,\, g\leqslant f}\int g = \inf_{h\in S_\uparrow,\, h\geqslant f}\int h \in \mathbb{R},$$

et on désigne par $\int f$ cette quantitié. On obtient alors une application

$$\int : \overline{L}^1(S,\textstyle\int) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Proposition 9.8. — *L'ensemble $\overline{L}^1(S,\int)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions sur M et $\int : \overline{L}^1(S,\int) \to \mathbb{R}$ est une application linéaire positive (i.e., $\int$ envoie une fonction positive en une valeur positive).*

Démonstration. — Par définition $\overline{L}^1(S,\int)$ est stable par l'addition et la dilatation par un scalaire positif et $\int : \overline{L}^1(S,\int) \to \mathbb{R}$ préserve l'addition et la multiplication par un scalaire positif. En outre, si f est un élément de $\overline{L}^1(S, \int)$, alors

$$\sup_{g\in S_\downarrow,\, g\leqslant -f}\int g = -\inf_{h\in S_\uparrow,\, h\geqslant f}\int h = -\sup_{g\in S_\downarrow\, g\leqslant f}\int g = \inf_{h\in S_\uparrow,\, h\geqslant -f}\int h.$$

Donc $-f \in \overline{L}^1(S, \int)$ et $\int -f = -\int f$. La dernière assertion est triviale. □

Théorème 9.9. — *Soient $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante de fonctions dans $\overline{L}^1(S, \int)$ telle que $f := \sup_{n\geqslant 0} f_n$ soit une fonction réelle. Si $\sup_{n\geqslant 0}\int f_n < +\infty$, alors on a $f \in \overline{L}^1(S, \int)$ et $\int f = \sup_{n\geqslant 0}\int f_n$.*

Démonstration. — Quitte à remplacer f_n par $f_n - f_0$, on peut supposer que $f_0 = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on choisit une fonction h_n dans $S_\uparrow$ telle que $f_n - f_{n-1} \leqslant h_n$ et que $\int f_n - f_{n-1} \geq (\int h_n) - \varepsilon/2^n$. On a alors $f_n \leqslant h_1 + \cdots + h_n$ et

$$\int f_n \geq (\int h_1 + \cdots + \int h_n) - \varepsilon.$$

Soit $h = \sum_{n\geqslant 1} h_n$. On a $h \in S_\uparrow$ et $\int h = \sum_{n\geqslant 1} h_n$. En outre, on a $f \leqslant h$ et

$$\lim_{n\to+\infty}\int f_n \geqslant \int h - \varepsilon.$$

Pour tout entier $n \geqslant 0$ on peut choisir $g_n \in S_\downarrow$ telle que $g_n \leqslant f_n \leqslant f$ et que $\int f_n \leqslant \int g_n + \varepsilon$. Donc pour n assez grand on a $\int h \leqslant \int g_n + 3\varepsilon$. Comme ε est arbitraire, on obtient $f \in L^1(M, \int)$ et $\int f = \lim_{n\to+\infty}\int f_n$. □

Remarque 9.10. — Si f et g sont deux éléments dans $\overline{L}^1(S, \int)$, alors $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont dans $\overline{L}^1(S, \int)$. Donc $\overline{L}^1(S, \int)$ est un espace vectoriel filtrant de fonctions sur M.

9.4. Classes monotones

Soit M un ensemble non-vide. On appelle classe monotone toute famille $\mathscr{M}$ de fonctions sur M qui est stable par les limites des suites monotones (croissantes ou décroissantes). Si S est une famille de fonctions sur M, on désigne par $\mathscr{M}(S)$ l'intersection de toutes les classes monotones contenant S. C'est la plut petite classe monotone contenant S.

Proposition 9.11. — *Si S est un espace vectoriel filtrant de fonctions sur M, alors $\mathscr{M}(S)$ l'est aussi.*

Démonstration. — Soit f une fonction sur M. Soit $\mathscr{M}(f)$ l'ensemble des fonctions g telles que $g + f$ et $\min(f, g)$ soient dans $\mathscr{M}(S)$. C'est une classe monotone. Si de plus $f \in S$, alors $\mathscr{M}(f)$ contient S, et donc il contient $\mathscr{M}(S)$; autrement dit, pour toute fonction $g \in \mathscr{M}(S)$, on a $g + f \in \mathscr{M}(S)$ et $\min(f, g) \in \mathscr{M}(S)$. Cela montre que, pour tout $f \in \mathscr{M}(S)$, on a $\mathscr{M}(f) \supset S$ et donc $\mathscr{M}(f) \supset \mathscr{M}(S)$. En particulier, pour tout couple (f,g) de fonctions dans $\mathscr{M}(S)$, les fonctions $f+g$ et $\min(f,g)$ sont dans $\mathscr{M}(S)$. Par l'argument similaire, on peut montrer que, si S est stable par la multiplication, alors $\mathscr{M}(S)$ l'est aussi.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On désigne par $\mathscr{M}_\lambda$ l'ensemble des fonctions f telle que $\lambda f \in \mathscr{M}(S)$. On a $\mathscr{M}_\lambda \supset S$. En outre, $\mathscr{M}_\lambda$ est une classe monotone, donc $\mathscr{M}_\lambda \supset \mathscr{M}(S)$. Le résultat est ainsi démontré. □

Lemme 9.12. — *Soit S un espace vectoriel filtrant de fonctions sur M. Toute fonction f dans $\mathscr{M}(S)$ est bornée supérieurement par une fonction dans $S_\uparrow$*

Démonstration. — Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des fonctions qui vérifient cette propriété. L'ensemble $\mathscr{M}$ est une classe monotone qui contient S, donc il contient $\mathscr{M}(S)$. □

Lemme 9.13. — *Soit S un espace vectoriel filtrant de fonctions sur M. On désigne par S^+ l'ensemble des fonctions positives dans S. Alors on a $\mathscr{M}(S^+) = \mathscr{M}(S)^+$, où $\mathscr{M}(S)^+$ désigne l'ensemble des fonctions positives dans $\mathscr{M}(S)$.*

Démonstration. — Comme $\mathscr{M}(S)^+$ est une classe monotone contenant S^+, on obtient $\mathscr{M}(S^+) \subset \mathscr{M}(S^+)$.

Soit $f \in S^+$. L'ensemble des fonctions g telles que $\min(f,g) \in \mathscr{M}(S^+)$ est une classe monotone contenant S^+. On en déduit que, pour tout $f \in S^+$ et tout $g \in \mathscr{M}(S^+)$, on a $\min(f,g) \in \mathscr{M}(S^+)$.

Soit $h \in \mathscr{M}(S)^+$. D'après le lemme précédent, il existe $\xi \in S_\uparrow$ tel que $h \leqslant \xi$. On choisit une suite croissante (ξ_n) de fonctions positives dans S telle que ξ_n converge vers ξ lorsque n tend vers l'infini. Pour tout n, $\min(\xi_n, h)$ est un élément dans $\mathscr{M}(S^+)$. En outre, la suite $(\min(\xi_n, h))_{n\geqslant 0}$ est croissante et converge vers h. On en déduit que $h \in \mathscr{M}(S^+)$. Le résultat est ainsi démontré. □

Définition 9.14. — Soient S un espace vectoriel filtrant de fonctions sur M. On désigne par $L^1(S,\int)$ l'interesction de $\overline{L}^1(S,\int)$ avec $\mathscr{M}(S)$. Les fonctions dans $L^1(S,\int)$ sont appelées des fonctions intégrables.

Théorème 9.15. — *Soient S un espace vectoriel filtrant de fonctions sur M et $\int$ une application d'intégration sur S. Soit f une fonction dans $\mathscr{M}(S)$. Alors f est intégrable si et seulement s'il existe $g \in L^1(S,\int)$ telle que $|f| \leqslant g$.*

Démonstration. — La nécessité est trivial : il suffit de prendre $g = |f|$. Dans la suite, on démontre la suffissance. Sans perte de généralité, on peut supposer f positive. L'ensemble des fonctions $h \in \mathscr{M}(S)^+$ telles que $\min(f,h) \in L^1(S,\int)$ est une classe monotone contenant S^+, donc il contient $\mathscr{M}(S^+)$. En particulier, on a $f = \min(f,g) \in L^1(S,\int)$. □

Si une fonction positive f dans $\mathscr{M}(S)$ n'est pas intégrable, on convient que $\int f = +\infty$. Si une application f de M vers $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ s'écrit comme la limite d'une suite croissante $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de fonctions positives dans $\mathscr{M}(S)$, on définit

$$\int f = \lim_{n\to+\infty} \int f_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

***Théorème 9.16* (Fatou).** — *Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions positives dans $\mathscr{M}(S)$. Alors on a*

$$\int \liminf_{n\to+\infty} f_n \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int f_n.$$

Démonstration. — Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit $g_n := \inf_{m\geqslant n} f_m$. La suite $(g_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} f_n$. Par conséquent, on a

$$\int \liminf_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \int g_n \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int f_n$$

car pour tout entier $n \geqslant 0$ on a $g_n \leqslant f_n$. □

***Théorème 9.17* (Convergence dominée).** — *Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions dans $\mathscr{M}(S)$ qui converge vers une fonction f. S'il existe une fonction intégrable g telle que $|f_n| \leqslant g$ pour tout entier $n \geqslant 0$, alors f est intégrable et on a*

$$\int f = \lim_{n\to+\infty} \int f_n.$$

Démonstration. — On applique le théorème de Fatou aux suites positives $(g-f_n)_{n\geqslant 0}$ et $(g+f_n)_{n\geqslant 0}$ pour obtenir

$$\int g - f \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int g - f_n,$$

$$\int g + f \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int g + f_n.$$

On en déduit que $g - f$ et $g + f$ sont intégrables. Donc f est intégrable, et

$$\liminf_{n\to+\infty} \int f_n \geqslant \int f \geqslant \limsup_{n\to+\infty} \int f_n,$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \int f_n = \int f$. □

9.5. Le cas de $\mathbb{R}^d$

Si U est un ouvert dans $\mathbb{R}^d$, alors $\mathbb{1}_U$ s'écrit comme la limite croissante de fonctions simples intégrables. Donc $\mathbb{1}_U \in \mathscr{M}(L^1_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^d))$. On endéduit que, si F est une partie fermée de $\mathbb{R}^d$, alors $\mathbb{1}_F$ est aussi dans $\mathscr{M}(L^1_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^d))$ car $\mathscr{M}(L^1_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^d))$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Comme $\mathscr{M}(L^1_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^d))$ est une classe monotone, on en déduit que les fonctions indicatrices de la réunion et de l'intersection d'une suite de parties ouvertes ou fermées sont aussi dans $\mathscr{M}(L^1_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^d))$.

On désigne par $L^1(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^d$.

Proposition 9.18. — *Toute fonction continue est dans* $\mathscr{M}(L^1_{\text{sim}})$

Démonstration. — Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$. Comme $f = \sup_{n\geqslant 0} \inf(f, n)$, on peut suppose que f est borné supérieurement. Par la même raison on peut supposer que f est bornée inférieurement. On suppose que $A \leqslant f < B$. Soit $\delta = B - A$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} (A + k\delta/n) \mathbb{1}_{\Omega_{n,k}},$$

où

$$\Omega_{n,k} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid A + (k-1)\delta/n \leqslant f(x) < A + k\delta/n\}.$$

L'ensemble $\Omega_{n,k}$ est l'intersection d'un ouvert avec un fermé. Donc $\mathbb{1}_{\Omega_{n,k}} \in \mathscr{M}(L^1_{\text{sim}}(\mathbb{R}^d))$ et f_n l'est aussi. Comme f est la limite décroissante des f_n, le résultat est démontré. $\square$

Proposition 9.19. — *Si f est une fonction dans $\mathscr{M}(L^1_{\text{sim}}(\mathbb{R}^d))$ et si A est une partie de $\mathbb{R}^d$ telle que $\mathbb{1}_A \in \mathscr{M}(L^1_{\text{sim}}(\mathbb{R}^d))$, alors on a $\mathbb{1}_A f \in \mathscr{M}(L^1_{\text{sim}}(\mathbb{R}^d))$*

Démonstration. — On désigne par $\mathscr{M}_A$ l'ensemble des fonctions f telles que $\mathbb{1}_A f \in \mathscr{M}(L^1_{\text{sim}}(\mathbb{R}^d))$. C'est une classe monotone.

On commence par le cas où A est un pavé. Dans ce cas-là on a $\mathscr{M}_A \supset L^1_{\text{sim}}(\mathbb{R}^d)$ et donc $\mathscr{M}_A \supset \mathscr{M}(L^1_{\text{sim}}(\mathbb{R}^d))$ et donc le résultat est vrai. Cela montre aussi que, si A est une partie de $\mathbb{R}^d$ telle que $\mathbb{1}_A \in \mathscr{M}(L^1_{\text{sim}}(\mathbb{R}^d))$ et si f est une fonction simple intégrable, alors $\mathbb{1}_A f \in \mathscr{M}(L^1_{\text{sim}}(\mathbb{R}^d))$ (on écrit f comme une combinaison linéaire de fonctions indicatrices de pavés). Par conséquent on a toujours $\mathscr{M}_A \supset L^1_{\text{sim}}(\mathbb{R}^d)$ et donc $\mathscr{M}_A \supset \mathscr{M}(L^1_{\text{sim}}(\mathbb{R}^d))$. Le résultat est démontré. $\square$

Définition 9.20. — Soient A une partie de $\mathbb{R}^d$ telle que $\mathbb{1}_A \in \mathscr{M}(L^1_{\text{sim}}(\mathbb{R}^d))$ et g une fonction définie sur A qui s'identifie à la restriction d'une fonction $f \in \mathscr{M}(L^1_{\text{sim}}(\mathbb{R}^d))$ à A, on définit $\int_A g(x)\,\mathrm{d}x$ comme

$$\int \mathbb{1}_A(x) f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pourvu que $\mathbb{1}_A f$ est intégrable.