Université Joseph Fourier
M2R Mathématiques Fondamentales
2013-2014

Contrôle de connaissance
(à rendre avant le 13/03/2014 à 16h)
les deux parties sont indépendentes

Première partie

Dans cette partie, on admet le résultat suivant :

Si $(\mathcal{C}, J)$ est un site, alors le foncteur d'oubli de la catégorie $\mathbf{Fai}(\mathcal{C}, J)$ *des faisceaux sur $(\mathcal{C}, J)$ à valeurs dans la catégorie des ensembles, vers la catégorie* $\mathbf{Fon}(\mathcal{C}^o, \mathbf{Ens})$ *des foncteurs de la catégorie opposée de $\mathcal{C}$ vers celle des ensembles, admet un adjoint à gauche que l'on notera comme* $\mathbf{a}$.

Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux catégories petites. On suppose que les produits fibrés existent dans les catégories $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Soient K_1 et K_2 des prétopologies sur $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ respectivement. On dit qu'un foncteur $\phi : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ est *continu* s'il préserve les produits fibrés et si elle vérifie la condition suivante : pour tout objet X_2 de $\mathcal{C}_2$ et tout élément $R_2 \in K_2(X_2)$, la famille

$$\phi(R_2) := \{\phi(f) \mid f \in R_2\}$$

appartient à $K_1(X_1)$.

Soit $\phi : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ un foncteur. Si $F : \mathcal{C}_1^{\mathrm{o}} \to \mathbf{Ens}$ est un préfaisceau sur $\mathcal{C}_1$ à valeurs dans la catégorie des ensembles, on désigne par $\phi_*(F)$ le préfaisceau $F\phi^{\mathrm{o}} : \mathcal{C}_2^{\mathrm{o}} \to \mathbf{Ens}$.

1. On suppose donné $\phi : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ un foncteur continu. Montrer que, si $F : \mathcal{C}_1^{\mathrm{o}} \to \mathbf{Ens}$ est un faisceau, alors il en est de même de $\phi_*(F)$.

Dans les questions **2**–**4**, on suppose donné un foncteur $\phi : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ qui admet un adjoint à gauche $\tau : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$. Pour tout objet X_1 de $\mathcal{C}_1$, soit I_{X_1} la catégorie dont

(a) les objets sont des couples (Y_2, f), où Y_2 est un objet de $\mathcal{C}_2$ et f est un morphisme de X_1 vers $\phi(Y_2)$,

(b) les morphismes d'un objet (Y_2, f) vers un autre objet (Y_2', f') sont les morphismes $g : Y_2 \to Y_2'$ dans $\mathcal{C}_2$ tels que $f' = \phi(g)f$.

2. On suppose que $\mathcal{C}_2$ a un objet terminal. Montrer que la catégorie $I_{X_1}^{\mathrm{o}}$ est filtrante quel que soit $X_1 \in \mathcal{C}_1$.

3. Montrer que le foncteur $\phi_* : \mathbf{Fon}(\mathcal{C}_1^{\mathrm{o}}, \mathbf{Ens}) \to \mathbf{Fon}(\mathcal{C}_2^{\mathrm{o}}, \mathbf{Ens})$ admet un ajoint à gauche.

4. En déduire que le foncteur $\phi_* : \mathbf{Fai}(\mathcal{C}_1, J_1) \to \mathbf{Fon}(\mathcal{C}_2^{\mathrm{o}}, \mathbf{Ens})$ admet un adjoint à gauche, où J_1 est la topologie de Grothendieck engendrée par K_1.

Dans la suite, on fixe une catégorie petite $\mathcal{C}$ admettant un objet terminal et on suppose que tout produit fibré existe dans $\mathcal{C}$. Soit en outre une prétopologie K sur $\mathcal{C}$.

On fixe un objet S de $\mathcal{C}$ et on désigne par $\mathcal{C}_{/S}$ la catégorie des morphismes d'un objet X de $\mathcal{C}$ vers S. Si $f : X \to S$ et $g : X \to S$ sont deux objets de $\mathcal{C}_{/S}$, alors $\mathcal{C}_{/S}(f, g)$ est défini comme l'ensemble des morphismes $h : X \to Y$ tel que $f = gh$. On désigne par $\iota : \mathcal{C}_{/S} \to \mathcal{C}$ le foncteur d'oubli qui envoie $f : X \to S$ en X.

5. Montrer que le foncteur d'oubli $\iota : \mathcal{C}_{/S} \to \mathcal{C}$ admet un adjoint à droite que l'on précisera.

6. Pour tout objet $f : X \to S$ dans $\mathcal{C}_{/S}$, on note $K_S(f) := K(X)$. Montrer que K_S est une prétopologie sur $\mathcal{C}_{/S}$.

7. Soit $F : \mathcal{C}_{/S}^{\mathrm{o}} \to \mathbf{Ens}$ un foncteur. Pour tout objet $X \in \mathcal{C}$, on note

$$\widetilde{F}(X) := \coprod_{f \in \mathcal{C}(X,S)} F(f).$$

Montrer que $\widetilde{F}$ définit un foncteur de $\mathcal{C}^{\mathrm{o}}$ vers $\mathbf{Ens}$ et que la projection sur les indices

$$\coprod_{f \in \mathcal{C}(X,S)} F(f) \longrightarrow \mathcal{C}(X, S)$$

définit une transformation naturelle de $\widetilde{F}$ vers $h_S : \mathcal{C}^{\mathrm{o}} \to \mathbf{Ens}$.

8. On suppose que le foncteur h_S est un faisceau pour la prétopologie K. Montrer que F est un faisceau par rapport à la prétopologie K_S si et seulement si $\widetilde{F}$ est un faisceau par rapport à la prétopologie K.

9. Soit $G : \mathcal{C}^{\mathrm{o}} \to \mathbf{Ens}$ un foncteur, établir la relation $\widetilde{\iota_* G} \cong G \times h_S$.

10. On suppose que tout foncteur représentable de $\mathcal{C}^{\mathrm{o}}$ est un faisceau. Soit $G : \mathcal{C}^{\mathrm{o}} \to \mathbf{Ens}$ un faisceau. Montrer que $\iota_* G$ est un faisceau.

Deuxième partie

Dans cette partie, on fixe un corps K et on désigne par $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Soit E un espace vectoriel sur K. On dit qu'un élément de $E_{\overline{K}}$ est K-*rationnel* s'il appartient à E. On dit qu'un sous-espace vectoriel de $E_{\overline{K}}$ est K-rationnel s'il est engendré par des vecteurs K-rationnels. Soit G le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Le groupe G opère K-linéairement sur l'espace $E_{\overline{K}}$.

11. Soit x un élément de $E_{\overline{K}}$ qui est invariant sous l'action du groupe G. Montrer que x est K-rationnel.

12. Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels sur K, et $f : E_{1,\overline{K}} \to E_{1,\overline{K}}$ une application $\overline{K}$-linéaire. On suppose que f commute à l'action du groupe G. Montrer que f envoie tout vecteur de E_1 dans E_2.

13. Soit F un sous-espace $\overline{K}$-vectoriel de $E_{\overline{K}}$. Montrer qu'il existe deux sous-espaces $\overline{K}$-vectoriels F_1 et F_2 de $E_{\overline{K}}$ qui sont K-rationnels et tels que $E_{\overline{K}}$ soit la somme directe de F_1 et F_2, ainsi qu'une application $\overline{K}$-linéaire $f : F_1 \to F_2$ tels que F s'identifie au graphe de l'application linéaire f.

14. Soit F un sous-espace vectoriel de $E_{\overline{K}}$. On suppose que F est stable sous l'action du groupe G. Montrer que F est K-rationnel.

Dans les questions suivantes, on suppose que $S = (K, M_K, \Theta_K)$ est une courbe arithmétique et $\overline{E}$ est un fibré vectoriel adélique non-nul sur S qui est hermitien. Soit

$$0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \ldots \subsetneq E_n = E$$

la filtration de Harder-Narasimhan de $\overline{E}$,

15. Soit K' une extension finie galoisienne de K. Montrer que

$$(\overline{E} \otimes_K K')_{\mathrm{des}} = \overline{E}_{\mathrm{des}} \otimes_K K'.$$

16. En déduire que, pour toute extension finie et séparable K'/K, on a

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E} \otimes_K K') = [K' : K]\, \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}).$$

17. Soit K'/K une extension finie et séparable. Que peut-on dire sur la filtration de Harder-Narasimhan de $\overline{E} \otimes_K K'$?

18. Soit $P_{\overline{E}}$ la fonction sur $[0, \mathrm{rg}(E)]$ définie comme

$$P_{\overline{E}}(x) = \widehat{\deg}(\overline{E}_i) + (x - \mathrm{rg}(E_{i-1}))\widehat{\mu}(\overline{E}_i/\overline{E}_{i-1}), \quad x \in [\mathrm{rg}(E_{i-1}), \mathrm{rg}(E_i)].$$

Montrer que, pour toute extension finie et séparable K'/K et tout sous-espace K'-vectoriel F de $E \otimes_K K'$, le point $(\mathrm{rg}(F), [K' : K]^{-1}\widehat{\deg}(F))$ est situé au-dessous du graphe de la fonction $P_{\overline{E}}$.