CHAPITRE I. Catégorie

§1 Catégorie :

- une collection $\mathcal{C}$ d'objets
- pour tout couple (X, Y) d'objets, un ensemble $\mathcal{C}(X, Y)$ des morphismes
  Si $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, on note $f : X \to Y$ ou $X \xrightarrow{f} Y$
- pour tout triplet (X, Y, Z) d'objets une applications (dite de composition)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) & \longrightarrow & \mathcal{C}(X, Z) \\ (f, g) & \longmapsto & gf \end{array}$$

qui vérifient les axiomes suivants :

(a) $\forall X \in \mathcal{C}$, il existe (un unique) $1_X \in \mathcal{C}(X, X)$ tel que
$\forall f : Y \to X$, $1_X f = f$ $\quad \forall g : X \to Z$, $g 1_X = g$

(b) Si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ sont des morphismes, alors $h(gf) = (hg)f$.

Exemples
- Ens : les ensembles + les applications d'ensembles
- Gp : les groupes + les morphismes de groupes
- Ab : les groupes abéliens + —
- An : les anneaux (commutatifs unifères) + les morphismes d'anneaux

Si A est un anneau,
- A-Mod : les A-modules + les homomorphisme A-linéaires
- An_A : les A-algèbres + les homomorphisme d'anneaux A-linéaires

Constructions

1. Catégorie opposée :
   $\mathcal{C}^\circ = \mathcal{C}$ comme collection d'objets
   $\mathcal{C}^\circ(X, Y) = \mathcal{C}(Y, X)$
   les application de composition proviennent de celles de $\mathcal{C}$.
2. Sous-catégorie :
   $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$.
   $\forall (X, Y)$ couple d'objets dans $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}(X, Y) \subset \mathcal{C}(X, Y)$
   les applications de composition proviennent de celles de $\mathcal{C}$ par restriction
   Si $\forall (X, Y)$ couple d'objets dans $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}(X, Y) = \mathcal{C}(X, Y)$, on dit que $\mathcal{D}$ est pleine

3. produit

Soient I un ensemble et $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ une famille de catégories.

$$\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i = \{(X_i)_{i\in I} \mid \forall i \; X_i \in \mathcal{C}_i\}$$

$$\Big(\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i\Big)\big((X_i)_{i\in I}, (Y_i)_{i\in I}\big) = \prod_{i\in I}\mathcal{C}_i(X_i, Y_i) = \{(f_i)_{i\in I} \mid f_i : X_i \to Y_i\}$$

si $(f_i)_{i\in I} : (X_i)_{i\in I} \to (Y_i)_{i\in I}$ $\quad (g_i)_{i\in I} : (Y_i)_{i\in I} \to (Z_i)_{i\in I}$

$$(g_i)_{i\in I}\cdot(f_i)_{i\in I} = (g_i f_i)_{i\in I}.$$

Foncteurs

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. On appelle <u>foncteur</u> de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ toute donnée comme la suite :

- une application $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ (entre les objets)
- pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathcal{C}$, une application $F : \mathcal{C}(X,Y) \longrightarrow \mathcal{D}(X,Y)$

qui vérifient les conditions suivantes :

(a) $\quad F(1_X) = 1_{F(X)}$

(b) $\quad$ pour tous morphismes $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ dans $\mathcal{C}$. $\quad F(gf) = F(g)F(f)$.

Exemples

1. <u>Foncteur d'oubli</u>. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie des ensembles munis d'une structure algébrique (Gp. Ab. An. A-Mod ...)
Le foncteur d'oubli $\mathcal{C} \longrightarrow$ Ens envoie un objet de $\mathcal{C}$ en son ensemble sous-jacent. $\quad An_A \to An$ est aussi un foncteur d'oubli

2. <u>Foncteur associé à un objet</u> Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Si X est un objet de $\mathcal{C}$, on note

$$\begin{aligned} h_X : \mathcal{C} &\longrightarrow \text{Ens} \\ Y &\longmapsto \mathcal{C}(X,Y) \end{aligned}$$

Si $f : Y \to Z$ est un morphisme de $\mathcal{C}$. on a

$$\begin{aligned} h_X(f) : \mathcal{C}(X,Y) &\longrightarrow \mathcal{C}(X,Z) \\ u &\longmapsto fu \end{aligned}$$

3. Foncteur composé

Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ sont des foncteurs, alors $GF : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$, qui envoie $X \in \mathcal{C}$ en $G(F(X))$, est un foncteur, appelé le composé
$f : X \to Y$ en $G(F(f))$
de F et G.

4. Foncteur A^n $\quad A^n : \mathrm{An} \longrightarrow \mathrm{Ens}$

$$A \mapsto A^n \text{ (comme ensemble)}$$

Définition Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs. On appelle transformation naturelle toute collection

$$\varphi = (\varphi_X : F(X) \to G(X))_{X \in \mathcal{C}}$$ morphisme de foncteurs.

de morphismes de $\mathcal{D}$ indexée par les objets de $\mathcal{C}$ telle que, pour tout morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\varphi_X} & G(X) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(Y) & \xrightarrow[\varphi_Y]{} & G(Y) \end{array}$$

commute.

$\mathrm{Nat}(F, G) :=$ la collection des transformations naturelles de F vers G.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie petite (i.e. la collection des objets de $\mathcal{C}$ est un ensemble), alors $\mathrm{Nat}(F, G)$ est un ensemble

$$\mathrm{Nat}(F, G) \subset \prod_{X \in \mathcal{C}} \mathcal{D}(F(X), G(X)).$$

Exemples 1. Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur, alors

$$1_F = (1_{F(X)} : F(X) \to F(X))_{X \in \mathcal{C}}$$

est une transformations naturelle de F vers lui-même.

2. Si $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ sont des foncteurs, $\varphi = (\varphi_X)_{X \in \mathcal{C}} : F \to G$ et $\psi = (\psi_X)_{X \in \mathcal{C}} : G \to H$ sont des transformations naturelles, alors $\psi\varphi = (\psi_X \varphi_X)_{X \in \mathcal{C}} : F \to H$ est une transformations naturelle.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie petite et si $\mathcal{D}$ est une catégorie, alors les foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ et les transformations naturelles forment une catégorie que l'on note comme $\underline{\mathrm{Fon}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

§2 Foncteurs représentables.

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$. On dit que f est un isomorphisme s'il existe un (unique) morphisme $f^{-1} : Y \to X$ tel que $ff^{-1} = 1_Y$, $f^{-1}f = 1_X$.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs, et $\varphi = (\varphi_X)_{X \in \mathcal{C}}$ est une transformation naturelle de F vers G. On dit que φ est un isomorphisme naturel (et F est isomorphe à G) si chaque morphisme φ_X est un isomorphisme.

<u>Définition</u> Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On dit qu'un foncteur $F : \mathcal{C} \to \underline{\mathrm{Ens}}$ est <u>représentable</u> s'il existe un objet $X \in \mathcal{C}$ tel que $F \simeq h_X$. (F est représenté par l'objet X).

<u>Exemples</u>

1. $\mathbb{A}^n : \underline{\mathrm{An}} \to \underline{\mathrm{Ens}}$ est représenté par $\mathbb{Z}[T_1, \cdots, T_n]$.
2. Soient k un anneau et M et N deux k-modules. Le foncteur

$$\begin{aligned} k\text{-}\underline{\mathrm{Mod}} &\longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}} \\ H &\longmapsto \{\text{applications } k\text{-bilinéaires de } M \times N \text{ vers } H\} \end{aligned}$$

est représenté par $M \otimes_k N$.

<u>Proposition</u> 1.1 Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $F : \mathcal{C} \to \underline{\mathrm{Ens}}$ un foncteur. Si X est un objet de $\mathcal{C}$, alors l'application de $\mathrm{Nat}(h_X, F)$ vers $F(X)$ qui envoie $\varphi \in \mathrm{Nat}(h_X, F)$ en $\varphi_X(1_X)$, est une bijection.

<u>Démonstration</u> Il suffit de construire l'inverse de cette application.

Pour tout $x \in F(X)$, soit $\alpha(x) = (\alpha(x)_Y)_{Y \in \mathcal{C}} \in Nat(h_X, F)$

où $\alpha(x)_Y : h_X(Y) \longrightarrow F(Y)$

$$(f \in \mathcal{C}(X,Y)) \longmapsto F(f)(x).$$

Si $f \in \mathcal{C}(X,Y)$, on a $\alpha(\varphi_X(1_X))_Y(f) = F(f)(\varphi_X(1_X))$

$$= \varphi_Y(h_X(f)(1_X)) = \varphi_Y(f)$$

$\uparrow \varphi \in Nat(h_X, F)$

Si $x \in F(X)$, on a

$$\alpha(x)_X(1_X) = F(1_X)(x) = 1_{F(X)}(x) = x.$$

*

<u>Définition</u> Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur.
Si pour tout couple d'objets (X, Y) de $\mathcal{C}$, $F : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{D}(F(X), F(Y))$
est une application injective / surjective, on dit que le foncteur F est fidèle / plein.

Si F est fidèle et plein, on dit que F est pleinement fidèle.

<u>Corollaire</u> 1 Soit $\mathcal{C}$ une catégorie petite, le foncteur (de Yoneda)

$$Y : \mathcal{C}^\circ \longrightarrow \underline{Fon}(\mathcal{C}, \underline{Ens})$$

$$X \longmapsto h_X$$

est pleinement fidèle.

<u>Corollaire</u> 2 Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Si $F : \mathcal{C} \to \underline{Ens}$ est représenté par deux objets X et Y de $\mathcal{C}$, alors X est isomorphe à Y dans la catégorie $\mathcal{C}$.

§3 Limites.

Soient I une catégorie petite et $\mathcal{C}$ une catégorie. Si X est un objet de $\mathcal{C}$, on désigne par $\Delta_X : I \to \mathcal{C}$ le foncteur diagonal

$$\Delta_X(i) = X$$

$$\forall\ f : i \to j \quad \Delta_X(f) = 1_X$$

Définition Soit $F : I \to \mathcal{C}$ un foncteur.

(a) Si le foncteur $\mathcal{C}^\circ \to \mathrm{Ens}$, $X \mapsto \mathrm{Nat}(\Delta_X, F)$ est représentable par un objet $\varprojlim F$, on dit que F admet la limite projective.

(b) Si le foncteur $\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ens}$, $X \longmapsto \mathrm{Nat}(F, \Delta_X)$ est représentable par un objet $\varinjlim F$, on dit que F admet la limite inductive.

Interprétation par les propriétés universelles

$\varphi \in \mathrm{Nat}(\Delta_X, F)$ correspond à $(\varphi_i : X \to F(i))_{i \in I}$

telle que $\forall f : i \to j$, $F(f)\varphi_i = \varphi_j$

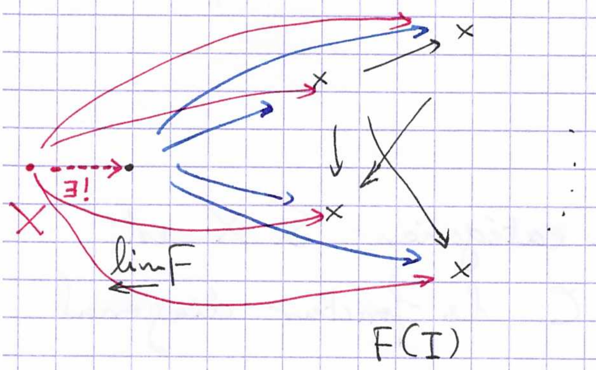
F possède la limite projective $\iff$ $\exists$ (une unique) famille

$(p_i : \varprojlim F \longrightarrow F(i))_{i \in I}$ (les morphismes universels) telle que

(a) $\forall f : i \to j$, $F(f)\, p_i = p_j$

(b) Si $(u_i : X \to F(i))_{i \in I}$ est une famille de morphismes dans $\mathcal{C}$ telle que $\forall f : i \to j$, $F(f)\, u_i = u_j$, alors il existe un unique $u : X \longrightarrow \varprojlim F$ tel que $p_i u = u_i$ quel que soit $i \in I$

On peut représenter cela par un diagramme



Exercice Donner l'interprétation de l'existence de limite inductive par une propriété universelle.

Remarque Si on note $F^\circ : I^\circ \to \mathcal{C}^\circ$ le foncteur induit par F, on a $\varinjlim F = \varprojlim F^\circ$. $\varprojlim F = \varinjlim F^\circ$

Exemple

1. Produit et coproduit

Soit I un ensemble. On le considère comme une catégorie en mettant

$$I(i, j) = \begin{cases} \{1_i\} & \text{si } i = j, \\ \emptyset & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Tout foncteur $F : I \to \mathcal{C}$ peut être considéré comme une famille $(F(i))_{i \in I}$ d'objets indexée par I.

La limite projective est F est appelée la produit des $(F(i))_{i\in I}$,
inductive coproduit

notées comme $\prod_{i \in I} F(i)$ et $\coprod_{i \in I} F(i)$ respectivement.

Si $I = \emptyset$, il y a un unique foncteur de I vers $\mathcal{C}$, sa limite projective est appelée l'objet terminal de $\mathcal{C}$.
inductive initial

2. Noyau et conoyau.

Si la catégorie I correspond au diagramme $* \rightrightarrows *$, tout foncteur $F : I \to \mathcal{C}$ correspond à un couple de morphismes $f, g : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$.

La limite projective de F est appelée le noyau de (f, g),
inductive conoyau

notée comme $\mathrm{Ker}(f, g)$
$\mathrm{CoKer}(f, g)$

Proposition 1.2 Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Si tout produit et tout noyau existent dans $\mathcal{C}$, alors toute limite projective existe dans $\mathcal{C}$
coproduit
conoyau inductive

Démonstration Soient I une catégorie petite et $F : I \to \mathcal{C}$ un foncteur.

Soient $X = \prod_{i \in I} F(i)$ et $\pi_i : X \to F(i)$ les morphismes universels. Soit $Y = \prod_{\substack{(j,k)\in I^2 \\ f : j \to k}} F(k)$. On a deux morphismes naturels de X vers Y

$$X \underset{t = (F(f)\pi_j)_{f:j\to k}}{\overset{s = (\pi_k)_{f:j\to k}}{\rightrightarrows}} Y$$

Le noyau de s et t est la limite projective de F ⁂

Exemples. ① Dans la catégorie des ensemble Ens

produit = produit cartésien

coproduit = réunion disjointe.

Si $E \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} F$ sont deux applications,

noyau = $\{ x \in E \mid f(x) = g(x) \}$

conoyau = $F/\sim$ où $\sim$ est la plus petite relation d'équivalence telle que $\forall x \in E \; f(x) \sim g(x)$.

Conclusion : dans la catégorie Ens, toutes limites projective et inductive existent.

Définition (Catégorie filtrante)

Soit I une catégorie petite. On dit que I est filtrante si $I \neq \emptyset$ et si les conditions suivantes sont vérifiées

(a) $\forall\, (i,j) \in I^2$, il existe $k \in I$ et des morphismes $i \to k$, $j \to k$

(b) $\forall\, (i,j) \in I^2$, $\forall\, u, v : i \to j$, il existe un morphisme $w : j \to k$ tel que $wu = wv$.

Soit $\mathcal{C}$ la catégorie des ensembles munis d'une structure algébrique (définie par un nombre fini de formule du premier ordre)
eg. An, $A\text{-}Mod$ An_A etc.

Si I est une catégorie filtrante et $F: I \to \mathcal{C}$ est un foncteur. alors $\varinjlim wF$ est naturellement muni de la structure algébrique (où $w: \mathcal{C} \to Ens$ est le foncteur d'oubli) et devient la limite inductive de F.

Exemple Localisation

Soit A un anneau. On dit qu'un sous-ensemble $S \subset A$ est multiplicative si $1 \in S$ et si S est stable par la multiplication.
On considère S comme une catégorie petite: (filtrante)

$$\forall\ a, b \in S \qquad S(a,b) = \{s \in S \mid sa = b\}$$

$$S(a,b) \times S(b,c) \longrightarrow S(a,c)$$

$$(s\ ,\ t) \longmapsto ts$$

Si M est un A-module, on construit un foncteur $F_{M,S}: S \longrightarrow A\text{-}Mod$ qui envoie tout $s \in S$ en M
tout $s \in S(a,b)$ en $M \xrightarrow{s} M$ (homothétie)
On désigne par $S^{-1}M$ la limite inductive du foncteur $F_{M,S}$.

Construction explicite

$$S^{-1}M = \Big\{ \underbrace{\frac{x}{s}}_{\text{écriture formelle}} \;\Big|\; \overbrace{x \in M,\ s \in S}^{M \times S} \Big\} \Big/ \sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence ~~engendre~~

$$\frac{x}{s} \sim \frac{y}{t} \iff \exists\, u \in S,\ u(tx - sy) = 0$$

Fonteur représentable et les limites.

Proposition 1.3 Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et F un foncteur d'une catégorie petite I vers $\mathcal{C}$. Si F possède la limite projective, alors $\forall X \in \mathcal{C}$ on a
$$\varprojlim (h_X F) = h_X (\varprojlim F)$$

Démonstration

Soit $Y = \varprojlim F$. $(p_i : Y \to F(i))_{i \in I}$ les morphismes universels. Si $f : i \to j$ est dans I, alors on a $p_j = F(f) p_i$, d'où $h_X(p_j) = h_X(F(f)) h_X(p_i)$.

Si M est un ensemble et si $(\delta_i : M \to \mathcal{C}(M, F(i)))_{i \in I}$ est une famille d'applications telle que $\forall x \in M$, $\forall f : i \to j$
$$\delta_j(x) = h_X(F(f)) \delta_i(x) = F(f) \delta_i(x),$$
alors il existe un unique morphisme $g(x) \in \mathcal{C}(X, Y)$ tel que
$$\delta_i(x) = p_i\, g(x) \quad \forall i \in I.$$
On obtient alors une unique application $g : M \to h_X(Y)$ tel que
$$\delta_i = h_X(p_i)\, g \quad \text{pour tout } i \in I$$
Ainsi $h_X(Y)$ et les $h_X(p_i)$ vérifient les propriétés universelles définissant $\varprojlim (h_X F)$.

\#

Corollaire Avec les notation de la proposition, si F possède la limite inductive, alors $\forall X \in \mathcal{C}$ on a un isomorphisme naturel :
$$\varprojlim \mathcal{C}(F(i), X) \cong \mathcal{C}(\varinjlim F, X)$$

Démonstration: Passer à la catégorie opposée.

\#

§4 Foncteurs adjoints.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ des foncteurs.

On dit que F est adjoint à gauche de G (G est adjoint à droite de F) s'il y a un isomorphisme fonctoriel en $X \in \mathcal{C}$ et $Y \in \mathcal{D}$:
$$\mathcal{C}(X, G(Y)) \simeq \mathcal{D}(F(X), Y).$$

<u>Proposition 4.1</u> Si I est une catégorie petite et si $(X_i)_{i\in I}$ est un foncteur de I vers $\mathcal{C}$ qui possède la limite inductive, alors le foncteur $(F(X_i))_{i\in I}$ de I vers $\mathcal{D}$ possède aussi la limite inductive, et on a $\varinjlim F(X_i) \cong F(\varinjlim X_i)$.

<u>Démonstration</u> Pour $Y \in \mathcal{D}$ on a un isomorphisme fonctoriel en Y

$$\mathcal{D}(F(X_i), Y) \cong \mathcal{C}(X_i, G(Y))$$

D'après la proposition 1.3 et son corollaire.

$$\varprojlim \mathcal{D}(F(X_i), Y) \underset{\text{Prop } 1.3}{\cong} \mathcal{D}(\varinjlim F(X_i), Y) \cong \varprojlim \mathcal{C}(X_i, G(Y)) \cong \mathcal{C}(\varinjlim X_i, G(Y))$$
$$\cong \mathcal{D}(F(\varinjlim X_i), Y).$$

Donc $\varinjlim F(X_i) \cong F(\varinjlim X_i)$ car ils représentent le même foncteur. ⌗

<u>Corollaire</u>

Si $(Y_i)_{i\in I}$ est un foncteur d'une catégorie petite I vers $\mathcal{D}$ qui possède la limite projective, alors $(G(Y_i))_{i\in I}$ possède aussi la limite projective, de plus, on a $\varprojlim G(Y_i) \cong G(\varprojlim Y_i)$. ⌗

<u>Exemples</u>. ① Si I est une catégorie petite et si $\mathcal{C}$ est une catégorie telle que toute foncteur de I vers $\mathcal{C}$ possède la limite projective / inductive, alors $\varprojlim$ / $\varinjlim$: $\mathrm{Fon}(I, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ est adjoint à droite / gauche du foncteur $\Delta : \mathcal{C} \to \mathrm{Fon}(I, \mathcal{C})$.

② Soit A un anneau (commutatif. unifère). Si M est un A-module, alors $\otimes_A M$ est adjoint à gauche du foncteur $\mathrm{Hom}_A(M, -)$:

Pour tous A-modules N et P on a des isomorphismes fonctoriels :

$$\mathrm{Hom}_A(N \otimes_A M, P) \cong \mathrm{Bil}_A(N \times M, P) \cong \mathrm{Hom}_A(N, \mathrm{Hom}_A(M, P))$$