CHAPITRE II Schémas

§1 Espaces localement annelés

X espace topologique. $\mathcal{T}_X$ la topologie de X = {ouverts}

$\mathcal{T}_X$ peut être considéré comme une catégorie

$$\mathcal{T}_X(V,U) = \begin{cases} \text{ensemble à un élément}, & \text{si } V \subset U \\ \emptyset, & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>Définition</u> 1.1 Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On appelle préfaisceau sur X à valeurs dans $\mathcal{C}$ tout foncteur de $\mathcal{T}_X^{op}$ vers $\mathcal{C}$.

Si $\mathcal{F} : \mathcal{T}_X^{op} \to \mathcal{C}$ est un foncteur et si $V \subset U$ sont deux ouverts, on désigne par $|_V : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ le morphisme dans $\mathcal{C}$ correspondant à $V \longrightarrow U$ via $\mathcal{F}$.

Dans la suite, on suppose $\mathcal{C}$ est complète.

Soit $\mathcal{F} : \mathcal{T}_X^{op} \to \mathcal{C}$ un préfaisceau. Si U est un ouvert de X et si $\mathcal{R}$ est un recouvrement de U par des ouverts, on désigne par $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ le noyau du diagramme

$$\prod_{V\in\mathcal{R}} \mathcal{F}(V) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightrightarrows}} \prod_{(V_1,V_2)\in\mathcal{R}^2} \mathcal{F}(V_1\cap V_2)$$

où $\varphi = (|_{V_1\cap V_2} \circ \pi_{V_1})_{(V_1,V_2)\in\mathcal{R}^2}$ $\quad \psi = (|_{V_1\cap V_2} \circ \pi_{V_2})_{(V_1,V_2)\in\mathcal{R}^2}$

Les morphismes $|_V : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ induit un morphisme $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{R})$ (par la propriété universel du noyau)

<u>Définition</u> 1.2 Si pour tout ouvert U et tout recouvrement ouvert $\mathcal{R}$, le morphisme $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{R})$ est un isomorphisme, on dit que $\mathcal{F}$ est un faisceau.

On désigne par $\mathrm{Fai}(X,\mathcal{C})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Fon}(\mathcal{T}_X^{op},\mathcal{C})$ des faisceaux.

(Kashiwara-Schapira)

<u>Théorème</u> 1.3 On suppose que ① la catégorie $\mathcal{C}$ est complète, ② toute limite inductive filtrante existe dans $\mathcal{C}$ et préserve les limites projectives finies

(3) la catégorie $\mathcal{C}$ vérifie la condition (IPC) comme la suite :

Pour tout ensemble A et toute famille $(I_a)_{a\in A}$ de catégories filtrante, si $(F_a : I_a \to \mathcal{C})_{a\in A}$ est une famille de foncteurs alors le morphisme naturel

$$\varphi : \varinjlim F \longrightarrow \prod_{a\in A} \varinjlim F_a$$

est un isomorphisme, où $F : \prod_{a\in A} I_a \longrightarrow \mathcal{C}$ est le foncteur tel que $F((i_a)_{a\in A}) = \prod_{a\in A} F_a(i_a)$.

Attention : Cette condition ne veut pas dire que la limite inductive filtrante préserve le produit.

Alors le foncteur d'inclusion $\mathrm{Fai}(X, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Fon}(\mathcal{T}_X^\circ, \mathcal{C})$ admet un adjoint à gauche $F \mapsto F^a$.

F^a : faisceau associé à F.

Ce théorème sera démontré dans un cadre plus général sur un site.

<u>Remarque</u> <1> Les catégories <u>Ens</u>, <u>An</u>, A-<u>Mod</u> vérifient les trois conditions décrites dans le théorème.

<2> La construction de φ :

Pour tout $b \in A$, on a le morphisme universel

$$F((i_a)_{a\in A}) = \prod_{a\in A} F_a(i_a) \longrightarrow F_b(i_b) \longrightarrow \varinjlim F_b$$

qui induit $F((i_a)_{a\in A}) \longrightarrow \prod_{b\in A} \varinjlim F_b$. φ est ensuite défini par la propriété universel

$$\begin{tikzcd} F((i_a)_{a\in A}) \arrow[r] \arrow[dr] & \prod_{b\in A} \varinjlim F_b \\ & \varinjlim F \arrow[u, dashed, "\varphi"', "\exists!"] \end{tikzcd}$$

Si X et Y sont deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ est une application continue, pour tout préfaisceau $\mathcal{F} \in \underline{\mathrm{Fon}}(\mathcal{T}_X^\circ, \mathcal{C})$ on définit $f_*(\mathcal{F}) \in \underline{\mathrm{Fon}}(\mathcal{T}_Y^\circ, \mathcal{C})$ tel que

$$f_*(\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$$

Si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ alors $(gf)_*(\mathcal{F}) \cong g_*(f_*\mathcal{F})$

Si $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert d'un ouvert U de Y alors $(f^{-1}(U_i))_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de $f^{-1}(U)$.

$\Rightarrow$ Si $\mathcal{F}$ est un faisceau, alors il en est de même de $f_*(\mathcal{F})$

<u>Définition</u> 1.4 Soit $\mathcal{G}$ un préfaisceau sur Y. Si le foncteur de $\underline{\mathrm{Fai}}(X, \mathcal{C})^\circ$ vers $\underline{\mathrm{Ens}}$

$$\mathcal{F} \longmapsto \mathrm{Nat}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

est représentable, on dit que $\mathcal{G}$ possède une image réciproque. On désigne par $f^{-1}(\mathcal{G})$ un faisceau sur X qui représente ce foncteur.

<u>Proposition</u> 1.5 Si $\mathcal{C}$ vérifie les trois conditions du théorème précédent, alors pour tout préfaisceau $\mathcal{G}$ sur Y, son image réciproque existe. En outre, $\mathcal{G} \mapsto f^{-1}(\mathcal{G})$ définit un foncteur de $\underline{\mathrm{Fon}}(\mathcal{T}_Y^\circ, \mathcal{C})$ vers $\underline{\mathrm{Fai}}(X, \mathcal{C})$, qui est adjoint à gauche du foncteur $f_* : \underline{\mathrm{Fai}}(X, \mathcal{C}) \to \underline{\mathrm{Fon}}(\mathcal{T}_Y^\circ, \mathcal{C})$

<u>Démonstration</u> Pour tout ouvert U de X on définit

$$f^+(\mathcal{G})(U) = \varinjlim_{W \supset \varphi(U)} \mathcal{G}(W).$$

$f^+(\mathcal{G})$ est un préfaisceau sur X. On désigne par $f^{-1}(\mathcal{G}) = f^+(\mathcal{G})^a$ le faisceau associé. On obtient alors un foncteur $\underline{\mathrm{Fon}}(\mathcal{T}_Y^\circ, \mathcal{C}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Fai}}(X, \mathcal{C})$

Enfin, on a des isomorphismes fonctoriels

$$\mathrm{Nat}(f^{-1}(\mathcal{G}), \mathcal{F}) \cong \mathrm{Nat}(f^+(\mathcal{G}), \mathcal{F}) \cong \mathrm{Nat}(\mathcal{G}, f_*(\mathcal{F}))$$

faisceau sur X — adjonction entre $(\cdot)^a$ et le foncteur d'oubli — définition de $\varinjlim$

Le résultat est donc démontré $\#$

<u>Remarque</u> $(gf)^{-1}(\cdot) \cong f^{-1}(g^{-1}(\cdot))$

<u>Définition</u> 1.6 Soit X un espace topologique. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie vérifiant les trois conditions du théorème. Si x est un point de X, on désigne par $i_x : \{x\} \to X$ l'application d'inclusion. Si $\mathcal{F}$ est un préfaisceau sur X à valeurs dans $\mathcal{C}$, on désigne par $\mathcal{F}_x$ l'image inverse $i_x^{-1}\mathcal{F}$. C'est un objet de $\mathcal{C}$. (car $\{x\}$ contient un seul pt)

Par définition on a

$$\mathcal{F}_x \cong \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$$

où U parcourt tous les ouverts contenant x.

<u>Remarque</u> On a $\mathcal{F}^a_x \cong \mathcal{F}_x$. En effet,

$$\mathcal{F}_x = i_x^{-1}\mathcal{F} \cong i_x^{-1}\,\mathrm{Id}_X^{-1}\mathcal{F} \cong i_x^{-1}\mathcal{F}^a = \mathcal{F}^a_x .$$

<u>Définition</u> 1.7 On appelle espace annelé tout espace topologique X muni d'un faisceau d'anneau $\mathcal{O}_X$. On utilise X pour désigne $(X, \mathcal{O}_X)$

Si X et Y sont deux espaces annelé, on appelle morphisme de X vers Y la donnée d'une application continue $f : X \to Y$ et un morphisme de faisceaux d'anneaux $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$

On appelle espace localement annelé tout espace annelé X tel que $\mathcal{O}_{X,x}$ soit un anneau local pour tout $x \in X$

On désigne par m_x l'idéal maximal, $\kappa(x) = \mathcal{O}_{X,x}/m_x$ le corps résiduel. Si $s \in \mathcal{O}_X(U)$, $x \in U$, $s(x)$ désigne l'image de s dans $\kappa(x)$

anneau local : anneau qui ne possède qu'un idéal maximal.

⚠ Dans le cas d'espace localement annelé, on exige que, $\forall x \in X$, l'homomorphisme d'anneaux $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ soit local (envoie l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ en celui de $\mathcal{O}_{X,x}$).

On désigne par <u>ELA</u> la catégorie des espaces localement annelés.

§2 Spectre premier.

Le but du paragraphe est de montrer le théorème suivant.

<u>Théorème</u> 2.1 Le foncteur de <u>ELA</u> vers <u>An°</u> qui envoie chaque espace localement annelé X en l'anneau $\mathcal{O}_X(X)$, admet un adjoint à droite Spec. (à ne pas effacer)

La construction du foncteur Spec : <u>An°</u> $\to$ <u>ELA</u> : ① <u>Ensemble</u>

Soit A un anneau. On désigne par $\mathrm{Spec}(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de A.

$\mathfrak{p}$ idéal de A. On dit que $\mathfrak{p}$ est premier si $A/\mathfrak{p}$ est intègre $(1 \neq 0)$

Si $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux et $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$.
alors $f^{-1}(\mathfrak{q}) = \operatorname{Ker}(A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\pi} B/\mathfrak{q})$

Donc $A/f^{-1}(\mathfrak{q})$ est un sous-anneau de $B/\mathfrak{q}$. $\rightsquigarrow$ c'est un anneau intègre. $\rightsquigarrow$ $f^{-1}(\mathfrak{q}) \in \operatorname{Spec} A$

On utilise l'expression ${}^r f$ pour désigner l'application $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$
$$\mathfrak{q} \longmapsto f^{-1}(\mathfrak{q})$$

Proposition 2.2 Si f est surjectif, alors ${}^r f$ est une application injective.

(2) Topologie

Définition 2.3 Soient A un anneau et $\mathfrak{a} \subset A$ un idéal. On désigne par $V(\mathfrak{a})$ l'image de $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a}) \to \operatorname{Spec}(A)$ induite par la projection $A \to A/\mathfrak{a}$.
Soit $D(\mathfrak{a}) := \operatorname{Spec} A \setminus V(\mathfrak{a})$ $\quad V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}\}$

Observation (1) $V(\{0\}) = \operatorname{Spec} A \quad V(A) = \emptyset$

(2) Si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, alors $V(\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a})$

(3) Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux de A, alors $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$

(4) Si $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ est une famille d'idéaux de A et $\mathfrak{a} = \sum_i \mathfrak{a}_i$, alors $V(\mathfrak{a}) = \bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i)$.

$\rightsquigarrow$ $\{D(\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{a}$ est un idéal de $A\}$ est une topologie sur $\operatorname{Spec} A$

Proposition 2.4 Si $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux, alors ${}^r f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ est une application continue.

Preuve $({}^r f)^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(f(\mathfrak{a})B)$.

Remarque $\operatorname{Spec} A$ est quasi-compact
Si $\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i = A$ $\left(\operatorname{Spec} A = \bigcup_i D(\mathfrak{a}_i)\right)$
alors il existe $J \subset I$ fini tel que $1 \in \sum_{j\in J} \mathfrak{a}_j$

(3) Localisation

Lemme 2.5 Soient A un anneau intègre et $S \subset A$ une famille multiplicative, $0 \notin S$. Alors $S^{-1}A$ est un anneau intègre.

Démonstration Comme $0 \notin S$, on a $1 \neq 0$ dans $S^{-1}A$.
Si $\frac{a}{s}$ et $\frac{b}{t}$ sont dans $S^{-1}A$, $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st} = 0$
alors il existe $u \in S$ tel que $uab = 0$.
Comme $u \neq 0$, on a $ab = 0$, donc $a = 0$ ou $b = 0$. $\times\!\!\times$

<u>Théorème</u> 2.6 Soient A un anneau et S une famille multiplicative. On désigne par $f: A \to S^{-1}A$ le morphisme d'anneaux tel que $f(a) = \frac{a}{1}$. Alors ${}^r f : \mathrm{Spec}(S^{-1}A) \to \mathrm{Spec}\, A$ est injective et définit un homéomorphisme de $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ vers l'image de ${}^r f$, qui s'identifie à $\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A \mid \mathfrak{p} \cap S = \phi\}$.

<u>Démonstration</u>

<u>observation</u> : Si I est un idéal de $S^{-1}A$ et si $\mathfrak{a} = f^{-1}(I)$, alors $I = S^{-1}\mathfrak{a}$.

Comme S^{-1} est un foncteur exact, $S^{-1}\mathfrak{a}$ est un idéal de $S^{-1}A$, qui est contenu dans I $\left(\mathfrak{a} = \{a \in A \mid \frac{a}{1} \in I\}\right)$

Réciproquement, si $\frac{a}{s} \in I$, alors $\frac{a}{1} \in I$, donc $a \in \mathfrak{a}$, d'où $I \subset S^{-1}\mathfrak{a}$.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. On a

$$S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{p} \cong S^{-1}(A/\mathfrak{p}) \cong \bar{S}^{-1}(A/\mathfrak{p})$$

← l'image de S dans $A/\mathfrak{p}$

Si $S \cap \mathfrak{p} = \phi$, alors $S^{-1}\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ (d'après le lemme)

Si $S \cap \mathfrak{p} \neq \phi$, alors $S^{-1}\mathfrak{p} = S^{-1}A$.

Soit $\Sigma(S) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A \mid \mathfrak{p} \cap S = \phi\}$. On a une application

$$\varphi : \Sigma(S) \longrightarrow \mathrm{Spec}(S^{-1}A)$$
$$\mathfrak{p} \longmapsto S^{-1}\mathfrak{p}.$$

D'après l'observation $\varphi \circ {}^r f = \mathrm{Id}_{\mathrm{Spec}(S^{-1}A)}$.

Si $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$, alors $f^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p}) = \left\{a \in A \mid \exists\, b \in \mathfrak{p} \text{ et } s \in S \text{ tels que } \frac{a}{1} = \frac{b}{s}\right\}$

Si $\mathfrak{p} \cap S = \phi$, alors la relation $\frac{a}{1} = \frac{b}{s}$ implique que $a \in \mathfrak{p}$ et donc ${}^r f(S^{-1}\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ $\quad ({}^r f \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\Sigma(S)})$

Enfin ${}^r f$ est une application fermée. En effet, si I est un idéal de $S^{-1}A$, alors $I = S^{-1}\mathfrak{a}$ avec $\mathfrak{a} = f^{-1}(I)$.

$\beta \in \mathrm{Spec}(S^{-1}I)$ contient $I \iff {}^r f(\beta)$ contient $\mathfrak{a}$.

$\beta \supset I \Rightarrow {}^r f(\beta) \supset f^{-1}(I) = \mathfrak{a}$

${}^r f(\beta) \supset \mathfrak{a} \Rightarrow \beta = S^{-1}({}^r f(\beta)) \supset S^{-1}(\mathfrak{a}) = I.$

$\left(\Rightarrow {}^r f(V(I)) = V(\mathfrak{a})\right).$

Corollaire Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier et si $S = A \setminus \{\mathfrak{p}\}$, alors $A_{\mathfrak{p}} = S^{-1}A$ est un anneau local.

4 Faisceau d'anneaux

Si U est un ouvert de $\operatorname{Spec} A$, soit

$$S_U := A \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in U} \mathfrak{p}$$

Remarque Si $U \subset U'$, alors $S_{U'} \subset S_U \rightsquigarrow$ homomorphisme $S_{U'}^{-1}A \longrightarrow S_U^{-1}A$.

$\longrightarrow$ $U \mapsto S_U^{-1}A$ est un préfaisceau d'anneaux sur $\operatorname{Spec} A$.

Définition 2.7 On désigne par $\tilde{A}$ le faisceau d'anneaux engendré par le préfaisceau $U \mapsto S_U^{-1}A$.

Proposition 2.8 $(\operatorname{Spec} A, \tilde{A})$ est un espace localement annelé

Démonstration Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. On a

$$\tilde{A}_{\mathfrak{p}} \cong \varinjlim_{U \ni \mathfrak{p}} S_U^{-1}A \cong \underset{\substack{\| \\ A_{\mathfrak{p}}}}{S^{-1}A} \quad \text{avec } S = \bigcup_{U \ni \mathfrak{p}} S_U = A \setminus \mathfrak{p}.$$

(En effet, si $s \in A \setminus \mathfrak{p}$, alors $\mathfrak{p} \notin V(As) \Rightarrow \mathfrak{p} \in D(As)$ mais pour tout idéal premier $\mathfrak{q} \in D(As)$ on a $s \notin \mathfrak{q}$.
Donc $s \in S_{D(As)}$).

La fonctorialité de Spec dans ELA est laissée comme un exercice

Démonstration du théorème

Soient X un espace localement annelé, A un anneau et $\Phi : X \to \operatorname{Spec} A$ un morphisme d'espaces localement annelés. Le morphisme $\Phi^{\#} : \tilde{A} \to \Phi_*(\mathcal{O}_X)$ induit un homomorphisme d'anneaux $A \to \mathcal{O}_X(X)$. On obtient donc une application qui est fonctorielle en X et en A

$$\underline{\mathrm{ELA}}(X, \operatorname{Spec} A) \longrightarrow \mathrm{An}(A, \mathcal{O}_X(X)) = \mathrm{An}^{\circ}(\mathcal{O}_X(X), A). \qquad (*)$$

Réciproquement, si $\phi : A \to \mathcal{O}_X(X)$ est un morphisme d'anneaux, on considère $g : X \to \operatorname{Spec} A$

$$x \longmapsto \operatorname{Ker}(A \to \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x)$$

l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$

Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A, alors $g(x) \in D(\mathfrak{a})$ si et seulement si $\exists f \in \mathfrak{a}$ tel que $\phi(f)(x) \neq 0$.

l'image de f dans $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$

Donc $$g^{-1}(D(\mathfrak{a})) = \bigcup_{f \in \mathfrak{a}} D(\phi(f))$$

$\{x \in X \mid \phi(f)(x) \neq 0\}$

Lemme Soit X un espace localement annelé. Si U est un ouvert de X et si $s \in \mathcal{O}_X(U)$, alors $D(s) := \{x \in U : s(x) \neq 0\}$ est un sous-ensemble ouvert de X.
En outre $s_{|D(s)}$ est un élément inversible de $\mathcal{O}_X(D(s))$.

Preuve Soit s_x l'image de s dans $\mathcal{O}_{X,x}$. On a $s_x \notin \mathfrak{m}_x$ car $s(x) \neq 0$.
Donc s_x est inversible car $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau local. Il existe alors un voisinage ouvert V de x, $V \subset U$ et $t \in \mathcal{O}_X(V)$ tel que $s_x t_x = 1$.
D'après la construction des limites inductives filtrantes dans la catégorie des anneaux, il existe $W \subset V$ voisinage ouvert de x tel que $s_{|W} \cdot t_{|W} = 1$.
Donc $W \subset D(s)$. ※

D'après le lemme, on obtient que $g^{-1}(D(\mathfrak{a}))$ est un ouvert de X. Donc g est une application continue. En outre, le morphisme composé

$$A \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_X(g^{-1}(D(\mathfrak{a})))$$

se factorise de façon unique par $S(\mathfrak{a})^{-1}A$. (l'image d'un élément de $S(\mathfrak{a})$ par ϕ est inversible sur $g^{-1}(D(\mathfrak{a}))$).
On obtient alors un morphisme des préfaisceaux $D(\mathfrak{a}) \mapsto S(\mathfrak{a})^{-1}A$ vers $g_*\mathcal{O}_X$, qui induit un morphisme de faisceaux $\tilde{A} \longrightarrow g_*\mathcal{O}_X$.

Pour tout $x \in X$, l'homomorphisme $A_{g(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est local.

Cela donne l'inverse de l'application $(*)$ ※

Corollaire Si A est un anneau, B et C sont A-algèbres, alors

$$\operatorname{Spec}(B \otimes_A C) \cong \operatorname{Spec} B \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} C$$

← limite projective de
$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Spec} C \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} B \arrow[r] & \operatorname{Spec} A \end{tikzcd}$$

§ 3 $\mathcal{A}_n^{\circ}$ comme une sous-catégorie pleine de $\underline{ELA}$

Définition 3.1 Soient A un anneau et M un A-module. Si le foncteur $- \otimes_A M : A\text{-}\underline{mod} \longrightarrow A\text{-}\underline{Mod}$ transforme toute suite exacte en une suite exacte, on dit que M est un A-module plat. Si une A-algèbre B est plat comme A-module, on dit que B est une A-algèbre plate.

Exemple Si S est une famille multiplicative, $S^{-1}A$ est une A-algèbre plate.

Lemme 3.2 Soient A un anneau et M un A-module. Alors $M = 0 \Leftrightarrow$ $\forall$ idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $M_{\mathfrak{m}} = 0$.

Démonstration "$\Rightarrow$" est trivial

"$\Leftarrow$" Soit $x \in M$, $x \neq 0$. Alors $\mathfrak{a} = \{a \in A \mid ax = 0\}$ est un idéal de A, et $1 \notin \mathfrak{a}$. Donc il existe un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A tel que $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{a}$ (lemme de Zorn). $\Rightarrow$ l'image de x dans $A_{\mathfrak{m}}$ est non-nul. ✠

Proposition 3.3 Soient A un anneau et M un A-module plat. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\forall$ idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A on a $\mathfrak{m}M \neq M$

(b) $\forall$ A-module N, $N \otimes_A M = 0$ entraîne $N = 0$.

(c) Pour tout homomorphisme $f : N_1 \to N_2$ de A-modules, si $f_M : N_1 \otimes_A M \to N_2 \otimes_A M$ est un isomorphisme, alors il en est de même de f.

Démonstration "a) $\Rightarrow$ b)" On suppose $N \neq 0$. Soit $x \in N$, $x \neq 0$.

Soit $f : A \to N$, $f(a) = ax$. Soit $N_1 = \operatorname{Im}(f)$.

Comme M est un A-module plat, $N_1 \otimes_A M$ est un sous-A-module de $N \otimes_A M$

qui est isomorphe à $M/\mathfrak{a}M$, où $\mathfrak{a} = \mathrm{Ker}(f) \neq A$.
Si $N \otimes_A M = 0$, alors $N_1 \otimes_A M = 0 \Rightarrow M = \mathfrak{a}M$. Cela est absurde (en prenant un idéal maximal $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{a}$).

(b) $\Rightarrow$ (c) Comme M est un A-module plat, on a $\mathrm{Ker}(f_M) \simeq \mathrm{Ker}(f) \otimes_A M$ et $\mathrm{Coker}(f_M) \simeq \mathrm{Coker}(f) \otimes_A M$. Si f_M est un isomorphisme, alors $\mathrm{Ker}(f_M) = 0$ et $\mathrm{Coker}(f_M) = \{0\}$, d'où $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Coker} f = 0$. i.e. f est un isomorphisme.

(c) $\Rightarrow$ (a) Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A. Si $M = \mathfrak{m}M$, alors

$$0 \otimes_A M = 0 = M/\mathfrak{m}M = (A/\mathfrak{m}) \otimes_A M.$$

Cela montre que $A/\mathfrak{m} = 0$, une contradiction.

<u>Définition 2.9</u> Si un A-module M vérifie l'une des condition équivalente dans la proposition précédente, on dit que M est fidèlement plat.

<u>Proposition 2.10</u> Soient $\varphi : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux tel que B soit une A-algèbre plate. Soit $\Phi : \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ l'application continue correspondant à φ. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(a) B est une A-algèbre fidèlement plate.

(b) Φ est une application surjective

(c) Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, il existe un idéal maximal $\mathfrak{M}$ de B tel que $\Phi(\mathfrak{M}) = \mathfrak{m}$.

<u>Démonstration</u>

(a) $\Rightarrow$ (b) Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A. On note $\mathfrak{b} = {}^r\varphi(\varphi(\mathfrak{a})B)$.
On a $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$. En outre, la platitude de B montre que

$$\mathfrak{b} \otimes_A B \simeq \varphi(\mathfrak{b})B = \varphi(\mathfrak{a})B \simeq \mathfrak{a} \otimes_A B$$

Comme B est fidèlement plate, on obtient $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.
En particulier, φ est injectif (on peut prendre $\mathfrak{a} = 0$).
Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A et $S = A \setminus \mathfrak{p}$, alors $\varphi(S) \cap \varphi(\mathfrak{p})B = \emptyset$.
Ainsi la localisation $\widetilde{\varphi(S)}^{-1}(B/\varphi(\mathfrak{p})B) \neq 0$, où $\widetilde{\varphi(S)}$ est l'image de $\varphi(S)$ dans $B/\varphi(\mathfrak{p})B$. Donc il existe un idéal premier $\mathfrak{P}$ de B contenant $\varphi(\mathfrak{p})B$ tel que $\mathfrak{P} \cap \varphi(S) = \emptyset$. Cela montre que ${}^r\varphi(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p}$.

Théorème 2.11 Soient A un anneau, B une A-algèbre fidèlement plate, et M un A-module. Les diagramme suivant est exact

$$0 \to M \xrightarrow{\partial_0} M\otimes_A B \xrightarrow{\partial_1} M\otimes_A B^{\otimes 2} \xrightarrow{\partial_2} M\otimes_A B^{\otimes 3} \xrightarrow{\partial_3} \cdots$$

où $\partial_0(m) = m\otimes 1$

$$\partial_n(m\otimes b_1\otimes\cdots\otimes b_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, m\otimes b_1\otimes\cdots\otimes b_{n-i}\otimes 1\otimes b_{n-i+1}\otimes\cdots\otimes b_n.$$

Démonstration Par la platitude fidèle de B, il suffit de vérifier l'exactitude de : $0 \to M\otimes_A B \xrightarrow{\partial_0\otimes 1} M\otimes_A B^{\otimes 2} \xrightarrow{\partial_1\otimes 1} M\otimes_A B^{\otimes 3} \xrightarrow{\partial_2\otimes 1} \cdots$ (*)

Pour $n\geq 0$, soit $s_n : M\otimes_A B^{\otimes(n+2)} \longrightarrow M\otimes_A B^{\otimes(n+1)}$

$$s_n(m\otimes b_0\otimes\cdots\otimes b_{n+1}) = m\otimes b_0\otimes\cdots\otimes b_{n-1}\otimes b_n b_{n+1}$$

On a

$$s_0(\partial_0\otimes 1) = \mathrm{Id}_{M\otimes_A B} \quad\text{et}\quad (\partial_n\otimes 1)s_n + s_{n+1}(\partial_{n+1}\otimes 1) = \mathrm{Id}_{M\otimes_A B^{\otimes(n+2)}}.$$

(*) est donc homotopique à la suite à felèche zéros. ✱

Corollaire Soit A un anneau. Pour tout $f\in A$, l'homomorphisme naturel $A[f^{-1}] \longrightarrow \tilde{A}(D(f))$ est un isomorphisme.

localisation de A par $S_f = \{1, f, f^2, \cdots\}$

Démonstration Les ouverts de la forme $D(f)$ $(f\in A)$ forment une base de topologie de $\operatorname{Spec} A$. En effet, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A on a $D(\mathfrak{a}) = \bigcup_{f\in\mathfrak{a}} D(f)$.

On suppose que $(D(f_i))_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de $D(f)$.

On a $D(f_i) = D(ff_i)$ car $D(f_i)\subset D(f)$. Montrons que l'homomorphisme naturel

$$A[f^{-1}] \xrightarrow{u} \prod_{i\in I} A[(ff_i)^{-1}]$$

induit un isomorphisme de $A[f^{-1}]$ au noyau de

$$\prod_{i\in I} A[(ff_i)^{-1}] \overset{v_1}{\underset{v_2}{\rightrightarrows}} \prod_{(j,k)\in I^2} A[(ff_jf_k)^{-1}].$$

Sans perte de généralité, on peut supposer I fini car $D(f)$ est homéomorphe à $\operatorname{Spec} A[f^{-1}]$, qui est un espace quasi-compact.

On note $B = \prod_{i\in I} A[(ff_i)^{-1}]$, alors $v_1 - v_2 = \partial_1 : B \longrightarrow B\otimes_{A[f^{-1}]} B$.

Son noyau est $A[f^{-1}]$, d'après le théorème précédent (B est fidèlement plat sur A)

<u>Corollaire</u> Le foncteur de $\underline{A}_n^{\circ} \longrightarrow \underline{ELA}$ qui envoie $A \in \underline{A}_n$ en $(\mathrm{Spec}\, A, \tilde{A})$ est pleinement fidèle, en d'autre termes

On a $ELA(\mathrm{Spec}\, A, \mathrm{Spec}\, B) \xrightarrow{\sim} A_n(B, A)$ l'isomorphisme naturel.

- C. Weibel. An introduction to homological algebra. Cambridge Studies in advanced mathematics 38
- S. MacLane Categories for Working mathematician GTM 5
- S. MacLane, I. Moerdijk. Sheaves in geometry and Logic Springer-Verlag 1994
- M. Kashiwara, P. Schapira. Categories and sheaves Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 332, Springer-Verlag 2006
- M. Demazure, P. Gabriel. Groupe algébrique. Tome I géométrie algébrique. généralités. groupes commutatifs. Masson & Cie. 1970.