§4 Topologie de Grothendieck

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie petite, $\mathcal{A}$ une catégorie complète.
On appelle préfaisceau sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ tout foncteur de $\mathcal{C}^\circ$ vers $\mathcal{A}$.

$\underline{\mathrm{Fon}}(\mathcal{C}^\circ, \mathcal{A})$: La catégorie des préfaisceaux

Définition 4.1 Soit $X \in \mathcal{C}$. On appelle crible de X tout sous-foncteur S de h_X. $(\forall Z \in \mathcal{C},\ S(Z) \subset \mathcal{C}(Z, X))$

foncteur de $\mathcal{C}^\circ$ vers $\underline{\mathrm{Ens}}$

On peut identifier S à une collections de morphismes vers X telle que, si $(Y \xrightarrow{u} X) \in S$ et si $v : Z \to Y$ est un morphisme arbitraire, alors $uv \in S$.

On appelle topologie de Grothendieck tout foncteur $J : \mathcal{C}^\circ \to \underline{\mathrm{Ens}}$ qui vérifie les conditions suivantes :

(a) $\forall X \in \mathcal{C}$, $J(X)$ est une collection de cribles et $h_X \in J(X)$

(b) $\forall f : Y \to X$ dans $\mathcal{C}$. $J(f) : J(X) \to J(Y)$ envoie $S \in J(X)$ en $f^*S := \{g : Z \to Y \mid fg \in S\}$

(c) Si $S \in J(X)$ et si S' est un crible de X tel que, $\forall f : Y \to X$ dans S on ait $f^*S' \in J(Y)$, alors $S' \in J(X)$.

$(\mathcal{C}, J)$ est appelé un site.

Dans le cas où les produits ~~fibrés~~ existent dans $\mathcal{C}$, on peut définir la topologie de Grothendieck à partir d'une prétopologie

On appelle prétopologie sur $\mathcal{C}$ toute famille $K = (K(X))_{X \in \mathcal{C}}$ où $K(X)$ est une collection de morphismes vers X vérifiant

(a) $\forall X \in \mathcal{C}$. $1_X \in K(X)$

(b) $\forall X \in \mathcal{C}$. $R \in K(X)$ et $f : Y \to X$ morphisme dans $\mathcal{C}$.

$$f^*R := \{ pr_2 : Z \times_X Y \to Y \mid (Z \to Y) \in R \} \in K(Y)$$

(c) $\forall X \in \mathcal{C}$, $R \in K(X)$, si on fixe, pour chaque $f : Y \to X$ dans R un élément $R_f \in K(Y)$, alors

$$\bigcup_{f \in R} \{ fg \mid g \in R_f \} \in K(X).$$

Exemple ① Ω un espace topologique. $\mathcal{T}$ la topologie de Ω, vue comme une catégorie.

Si U est un ouvert, V et W sont des ouverts contenus dans U, alors $V \cap W \cong V \times_U W$.

On définit $K(U) = \{$recouvrement ouvert de $U\}$.

alors K est une prétopologie sur $\mathcal{T}$

② $\mathcal{C} = \underline{An}^{\circ}$, où $\underline{An}$ est la catégorie des anneaux dont l'ensemble sous-jacent appartient à un univers $\mathcal{U} \in$ un autre univers $\mathcal{U}'$.

Si $A \to B$ et $A \to C$ sont des morphismes dans $\underline{An}$, alors $B \otimes_A C$ est leur produit fibré dans $\underline{An}^{\circ}$

On définit $K^{Zar}(A) := \left\{ (A[s_i^{-1}])_{i\in I} \text{ où } (s_i)_{i\in I} \subset A \text{ est tel que } \sum_{i\in I} A s_i = A \right\}$.

La condition (a) est trivialement satisfaite

(b) Si B est une A-algèbre, $f : A \to B$ est l'homomorphisme structurel, alors

$$f^*\left((A[s_i^{-1}])_{i\in I}\right) = \left(B[f(s_i)^{-1}]\right)_{i\in I} \in K^{Zar}(B) \quad \text{car} \quad \sum_{i\in I} B f(s_i) = B$$

si $\sum_{i\in I} A s_i = A$

(c) Si $R = (A[s_i^{-1}])_{i\in I} \in K^{Zar}(A)$, et si $\forall i \in I$ on choisit $(A[(s_i t_{ij})^{-1}])_{j\in I_i} \in K^{Zar}(A[s_i^{-1}])$. On a alors $\sum_{j\in I_i} A[s_i^{-1}] t_{ij} = A[s_i^{-1}]$

$$\Rightarrow \exists\, n_i \geq 0 \text{ tel que } s_i^{n_i} \in \sum_{j\in I_i} A s_i t_{ij}$$

$$\Rightarrow A = \sum_{i\in I} A s_i^{n_i} \subset \sum_{i\in I} \sum_{j\in I_i} A s_i t_{ij}.$$

<u>Proposition 4.2</u> On suppose que $\mathcal{C}$ est une catégorie petite dont tout produit fibré existe. Si K est une prétopologie sur $\mathcal{C}$, alors $J = (J(X))_{X\in\mathcal{C}}$ avec $J(X) = \{ S \text{ crible de } X \mid \exists R \in K(X),\ R \subset S \}$ est une topologie de Grothendieck (appelée la topologie associée à K).

<u>Démonstration</u> (a) $1_X \in K(X) \Rightarrow h_X \in J(X)$

(b) Si $f: Y \to X$ est dans $\mathcal{C}$ et si $R \in K(X)$, alors

$$S \supset R \quad \Rightarrow \quad f^*S \supset f^*R$$

(c) Soit $X \in \mathcal{C}$ et S, S' deux cribles, $S \in J(X)$, $S \supset R$, $R \in K(X)$.
On suppose que, $\forall f: Y \to X$ dans R, $\exists R_f \in K(Y)$ tel que $R_f \subset f^*S'$,
alors

$$R' := \bigcup_{f\in R} \{ fg \mid g \in R_f \} \quad \subset S' \quad \text{et} \quad R' \in K(X)$$

$\Rightarrow S' \in K(X)$ ☆

(On désigne par J^{Zar} la topologie associée à K^{Zar}, appelée la topologie de Zariski-Grothendieck sur $\underline{A}_n^{\circ}$).

<u>Définition 4.3</u> Soit $(\mathcal{C}, J)$ un site. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie complète. On dit qu'un préfaisceau $F: \mathcal{C}^{\circ} \to \mathcal{A}$ est un faisceau si, pour tout $X \in \mathcal{C}$ et tout $S \in J(X)$, le morphisme naturel

$$F(X) \longrightarrow F(S) := \varprojlim \left(\prod_{(W \xrightarrow{f} X)\in S} F(W) \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} \prod_{(Y \xrightarrow{u} X)\in S} \ \prod_{Z \xrightarrow{v} Y} F(Z) \right)$$

est un isomorphisme, où p_1 est induit par

$$pr_{uv} : \prod_{(W \xrightarrow{f} X)\in S} F(W) \longrightarrow F(Z) \qquad \text{avec } (Y \xrightarrow{u} X) \in S,\ Z \xrightarrow{v} Y$$

p_2 est induit par

$$F(v)\, pr_u : \prod_{(W \xrightarrow{f} X)\in S} F(W) \longrightarrow F(Z) \qquad \text{avec } (Y \xrightarrow{u} X) \in S \quad Z \xrightarrow{v} Y.$$

<u>Théorème 4.4.</u> On suppose que tout produit fibré dans $\mathcal{C}$ existe. et que J est associé à une prétopologie K. Alors $F \in \underline{\mathrm{Fon}}(\mathcal{C}^\circ, \mathcal{A})$ est un faisceau si et seulement si, $\forall\, X \in \mathcal{C}$ et $R \in K(X)$, le morphisme naturel

$$F(X) \longrightarrow F(R) := \varprojlim \left(\prod_{(W \xrightarrow{f} X) \in R} F(W) \underset{g_2}{\overset{g_1}{\rightrightarrows}} \prod_{(U \xrightarrow{a} X) \in R} \; \prod_{(V \xrightarrow{b} X) \in R} F(U \times_X V) \right)$$

est un isomorphisme, où g_1 est induit par

$$F(pr_1)\, pr_a : \prod_{(W \xrightarrow{f} X) \in R} F(W) \longrightarrow F(U \times_X V) \qquad a : U \to X,\ b : V \to X \text{ dans } R$$

g_2 est induit par

$$F(pr_2)\, pr_b : \prod_{(W \xrightarrow{f} X) \in R} F(W) \longrightarrow F(U \times_X V). \qquad a : U \to X \quad b : V \to X \text{ dans } R.$$

<u>Idée de démonstration</u> Soit $S = \{ f : W \to X \mid \exists\, g : Y \to X \text{ et } h : W \to Y \text{ avec } g \in R \text{ et } gh = f \}$

Construire un isomorphisme entre $F(S)$ et $F(R)$

§5 ~~Foncteurs~~ Préfaisceaux et faisceaux sur $\underline{An}^\circ$

Dans ce paragraphe, on étudie les foncteurs de $\underline{An}$ vers $\underline{Ens}$.

- Un anneau peut être considéré comme un foncteur de $\underline{An}$ vers $\underline{Ens}$ (foncteur représentable)
- Si $X \in \underline{ELA}$, on définit un foncteur : $\underline{An} \longrightarrow \underline{Ens}$
  $A \longmapsto \underline{ELA}(\mathrm{Spec}\, A, X)$.

<u>Définition 5.1</u> Soit $\varphi : F \to G$ un morphisme de foncteurs dans $\underline{\mathrm{Fon}}(\underline{An}, \underline{Ens})$. On dit que φ est un monomorphisme si $\forall\, A \in \underline{An}$, (ou F est un sous-foncteur de G)

$\varphi(A) : F(A) \to G(A)$ est une application injective.

<u>Exemple</u> ,

Si $X \in \underline{ELA}$, $U \subset X$ est un ouvert, alors U définit un sous-foncteur de X.

En particulier, si B est un anneau et si $\mathfrak{b} \subset B$ est un idéal, alors $D(\mathfrak{b})$ définit un sous-foncteur du foncteur représentable h_B

<u>Définition 5.2</u> Soit $\varphi : F \to G$ un monomorphisme de foncteurs dans $\mathrm{Fon}(\underline{An}, \underline{Ens})$. Si, pour tout anneau A et tout morphisme $\mathrm{Spec}\, A \to G$, le sous-foncteur

$$pr_1 : \mathrm{Spec}\, A \underset{G}{\times} F \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A$$

de G est isomorphe à $D(\mathfrak{a})$ où $\mathfrak{a}$ est certain idéal de A, on dit que φ est une immersion ouverte.

Réalisation géométrique d'un foncteur.

<u>Théorème 5.3</u> Le foncteur $\underline{ELA} \longrightarrow \mathrm{Fon}(\underline{An}, \underline{Ens})$ qui envoie tout espace localement annelé X en le foncteur $A \mapsto \underline{ELA}(\mathrm{Spec}\, A, X)$, admet un adjoint à gauche Rg. Autrement dit, pour tout foncteur F et tout espace localement annelé X on a un isomorphisme fonctoriel

$$\underline{ELA}(Rg(F), X) \cong \mathrm{Nat}(F, X)$$

<u>Démonstration</u> Soit I l'ensemble des couples (A, α) où $A \in \underline{An}$ et $\alpha \in F(A)$. Si (A, α) et (B, β) sont deux couples dans I, on définit

$$I((A,\alpha), (B,\beta)) = \{ f : A \to B \mid F(f)(\alpha) = \beta \}$$

Soit $G : I \longrightarrow \underline{An}$ le foncteur qui envoie (A, α) en A.

On désigne par $Rg(F)$ la limite inductive de $\mathrm{Spec} \circ G^\circ$

$$I^\circ \xrightarrow{G^\circ} \underline{An}^\circ \xrightarrow{\mathrm{Spec}} \underline{ELA}$$

On a

$$\underline{ELA}(Rg(F), X) \cong \underline{ELA}(\varinjlim \mathrm{Spec} \circ G^\circ, X) \cong \varprojlim_{(A,\alpha) \in I^\circ} \underline{ELA}(\mathrm{Spec} A, X)$$

$$= \varprojlim_{(A,\alpha)\in I^\circ} X(A) \cong \mathrm{Nat}(F, X)$$

on utilise ici la définition de $\varinjlim$ et Nat.

car $F \cong \varinjlim_{(A,\alpha)\in I^\circ} h_A$

<u>Définition 5.4</u> Soit $F : \underline{An} \longrightarrow \underline{Ens}$ un foncteur. On désigne par $A(F)$ l'ensemble $Nat(F, \mathbb{A}^1)$. Comme $\mathbb{A}^1$ peut être considéré comme un foncteur de $\underline{An}$ ver $\underline{An}$, l'ensemble $A(F)$ est naturellement muni d'une structure d'anneau. On l'appelle l'anneau des fonctions régulières du foncteur F.

<u>Corollaire</u> Soit $F : \underline{An} \longrightarrow \underline{Ens}$ un foncteur, Soit R un anneau. On a un isomorphisme fonctoriel

$$Nat(F, Spec R) \cong \underline{An}(R, A(F)).$$

<u>Démonstration</u> On a

$$Nat(F, Spec R) \cong \underline{ELA}(Rg(F), Spec R) \cong \underline{An}(R, \mathcal{O}_{Rg(F)}(Rg(F)))$$

Le cas particulier où $R = \mathbb{Z}[T]$ montre que

$$A(F) \cong \underline{An}(\mathbb{Z}[T], \mathcal{O}_{Rg(F)}(Rg(F))) = \mathcal{O}_{Rg(F)}(Rg(F)).$$

On obtient donc le résultat. #

<u>Construction explicite</u> de $Rg(F)$

Soit $\underline{Cps}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{An}$ des corps.
Si $F : \underline{An} \longrightarrow \underline{Ens}$ est un foncteur, alors ensemblistement on a

$$|Rg(F)| \cong \varinjlim_{K \in \underline{Cps}} F(K). \qquad (*)$$

<u>Exemple</u> Si A est un anneau, alors tout point $\mathfrak{p}$ de $Spec A$ correspond à un homomorphisme

$$A \longrightarrow A/\mathfrak{p} \longrightarrow K(A/\mathfrak{p})$$

$\uparrow$ corps des fractions

$\Rightarrow$ $(*)$ est vrai pour $Spec A$

En effet $Rg(F) \cong \varinjlim_{(A,\alpha) \in I^\circ} Spec A$ dans $\underline{ELA}$ (Rg préserve la limite inductive)
il suffit d'appliquer l'exemple. (limites inductives commutent)

<u>Notation</u> : Soit $H : \underline{Cps} \to \underline{Ens}$ un foncteur. Pour $x \in \varinjlim H$ et k un corps. On désigne par $H_x(k)$ le sous-ensemble de $H(k)$ dont l'image dans $\varinjlim H$ s'identifie à x.

Si $G : \underline{An} \to \underline{Ens}$ est un foncteur et si U est un sous-ensemble de $|Rg(G)|$, on désigne par G_U le foncteur $\underline{An} \to \underline{Ens}$ défini comme

$$G_U(A) = \left\{ \rho \in G(A) \;\middle|\; \forall k \in \underline{Cps},\ \forall \alpha \in \underline{An}(A,k),\ G(\alpha)(\rho) \in \bigcup_{x \in U} (G|_{\underline{Cps}})_x(k) \right\}$$

- Par définition, on a $U \simeq \varinjlim_{k \in \underline{Cps}} G_U(k)$.
- Si $\varphi : F \to G$ est un morphisme de foncteurs dans $\underline{Fon}(\underline{An}, \underline{Ens})$.

alors pour tout anneau A on a

$$F_{Rg(\varphi)^{-1}(U)}(A) = \varphi_A^{-1}(G_U(A))$$

On a donc $F_{Rg(\varphi)^{-1}(U)} \simeq G_U \times_G F$.

- Si X est un espace localement annelé, U est un ouvert de X, G est le foncteur $A \mapsto \underline{ELA}(\mathrm{Spec}\,A, X)$. alors G_U s'identifie au foncteur $A \mapsto \underline{ELA}(\mathrm{Spec}\,A, U)$.

<u>Proposition 5.5</u> Soit $F : \underline{An} \to \underline{Ens}$ un ~~ensemble~~ foncteur. La relation $U \mapsto F_U$ définit une bijection

$$\left\{ \text{parties ouvertes de } |Rg(F)| \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{classes d'isomorphisme} \\ \text{des immersions ouvertes} \\ \text{dans } F \end{array} \right\}.$$

<u>Idée de démonstration</u> :

$U \subset |Rg(F)|$ est ouvert $\Leftrightarrow \forall (A, \alpha) \in I$, $\tilde{\alpha}^{-1}(U)$ est une partie ouverte de $\mathrm{Spec}\,A$

$\Leftrightarrow \forall \alpha : \mathrm{Spec}\,A \to F$
$\mathrm{Spec}\,A \times_{F,\alpha} F_U \to \mathrm{Spec}\,A$
est défini par un idéal

(on considère $\alpha \in F(A)$ comme $\tilde{\alpha} : \mathrm{Spec}\,A \xrightarrow{\alpha} F \longrightarrow Rg(F)$ correspondant à $1_{Rg(F)}$

Corollaire ① Le composé de deux immersions ouverte est une immersion ouverte

② Si $\varphi : G \to F$ est une immersion ouverte et $\psi : H \to F$ est un morphisme de foncteurs, alors $G \times_F H \to H$ est une inersion ouverte.

③ Si $\varphi : G \to F$ et $\psi : H \to F$ sont des immersion ouvertes, alors

$$G \times_F H \longrightarrow F \quad \text{l'est aussi.}$$

\#

§6 Schémas

Définition 6.1 Soit $F : \underline{An} \to \underline{Ens}$ un foncteur. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-foncteurs de F. On dit que $(F_i)_{i \in I}$ recouvre F si, pour tout corps k on a $F(k) \subset \bigcup_{i \in I} F_i(k)$.

On appelle schéma tout foncteur $F : \underline{An} \to \underline{Ens}$ qui est un faisceau pour la topologie de Zariski-Grothendieck et qui admet un recouvrement par des immersions ouvertes de foncteurs représentables vers F. *Exemple* : Tout foncteur représentable est un schéma.

Proposition 6.2 Soit $F : \underline{An} \longrightarrow \underline{Ens}$ un foncteur. Les conditions suivantes sont équivalentes :

① F est un faisceau pour la topologie de Zariski-Grothendieck

② Pour tout anneau A, le préfaisceau d'ensembles sur $\operatorname{Spec} A$, qui envoie tout ouvert U de $\operatorname{Spec} A$ en $\operatorname{Nat}(U, F)$, est un faisceau

③ Pour tout foncteur $G : \underline{An} \to \underline{Ens}$, le préfaisceau d'ensembles sur $|Rg(G)|$ qui envoie U en $\operatorname{Nat}(G_U, F)$, est un faisceau.

Démonstration ① est un cas particulier de ②

En effet, pour tout anneau A et tout $s \in A$ on a

$$\operatorname{Nat}(D(s), F) \cong F(A[s^{-1}]).$$

C'est en fait équivalent si on pense à une base de topologie.

② est un cas particulier de ③

② ⇒ ③

On peut écrire G comme une limite inductive filtrante de foncteurs représentables

$$G = \varinjlim_{\underset{\in A_1 \quad \in G(A)}{(A,\rho)}} h_A$$

Si U est un ouvert de $|Rg(G)|$, on a

$$G_U \cong G \times_G G_U \cong \varinjlim_{(A,\rho)} h_A \times_{G,\rho} G_U \cong \varinjlim_{(A,\rho)} Rg(\rho)^{-1}(U)$$

$$\Rightarrow \quad Nat(G_U, F) \cong \varprojlim_{(A,\rho)} Nat\left(Rg(\rho)^{-1}(U), F\right)$$

l'image directe du faisceau $V \mapsto Nat(V, F)$ par $Rg(\rho)$.

Enfin, la limite projective d'un faisceau est encore un faisceau.

<u>Corollaire</u> Soit $F : \underline{A_1} \longrightarrow \underline{Ens}$ un foncteur. Alors $U \mapsto A(F_U)$ est un faisceau sur l'espace topologique $|Rg(F)|$, qui s'identifie au faisceau structural de $Rg(F)$.

<u>Démonstration</u> Comme $\mathbb{A}^1$ est représentable, $U \mapsto A(F_U) \cong Nat(F_U, \mathbb{A}^1)$ est un faisceau.

Dans le cas où F est représentable $(\cong \operatorname{Spec} B)$, et $U = D(s)$, $s \in B$.

alors $F_U \cong \operatorname{Spec} B[s^{-1}]$ et $Nat(F_U, \mathbb{A}^1) \cong B[s^{-1}]$

Dans le cas général, on écrit F comme une limite inductive de foncteurs représentables ⇝

$$F_U \cong \varinjlim_{(A,\rho)} Rg(\rho)^{-1}(U)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{O}_{Rg(F)}(U) \cong \varprojlim_{(A,\rho)} \tilde{A}\left(Rg(\rho)^{-1}(U)\right) \cong \varprojlim_{(A,\rho)} Nat\left(Rg(\rho)^{-1}(U), \mathbb{A}^1\right)$$

$$\cong Nat\left(\varinjlim_{(A,\rho)} Rg(\rho)^{-1}(U), \mathbb{A}^1\right) \cong Nat(F_U, \mathbb{A}^1) = A(F_U).$$

<u>Corollaire</u> Soit $\varphi : F \to G$ une transformation naturelle de foncteurs dans $\underline{Fon}(\underline{A_n}, \underline{Ens})$. Si φ est une immersion ouverte, alors $Rg(\varphi) : Rg(F) \longrightarrow Rg(G)$ est une immersion ouverte d'espaces localement annelés.

<u>Théorème</u> 6.3 Soit X un espace localement annelé. Soit $G : \underline{A_n} \to \underline{Ens}$ un foncteur.

① Si Φ_X est recouvert par une famille d'inversions par des foncteurs représentables, alors le morphisme $Rg(X) \to X$ est un isomorphisme

② G est un schéma si et seulement si $Rg(G)$ peut être recouvert par une famille d'immersions par des foncteurs représentables et le morphisme de foncteurs canonique $G \longrightarrow \Phi_{Rg(G)}$ est un isomorphisme.

<u>Corollaire</u> Si on désigne par $\underline{Sch}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{Fon}(\underline{A_n}, \underline{Ens})$ des schémas, alors $Rg : \underline{Sch} \longrightarrow \underline{ELA}$ est pleinement fidèle.

<u>Démonstration</u> ① Si $x \in X$, alors on a $\operatorname{Spec} \kappa(x) \longrightarrow X$

Réciproquement, si $f : \operatorname{Spec} K \to X$. alors K est une extension de $\kappa(x)$.
$\{x\} = \operatorname{Im}(f)$

Si X est recouvert par $(F_i)_{i \in I}$. chaque F_i correspond à $U_i \to X$

La représentabilité de F_i montre que $Rg(U_i) = Rg(F_i) \longrightarrow U_i$

est un isomorphisme. $\Rightarrow$ $Rg(X) \to X$ l'est aussi

② La suffisance est facile.

Nécessité : On suppose que G est un schéma.

$(\varphi_i : G_i \to G)$ est un recouvrement par les immersions représentables

$\Rightarrow (Rg(G_i))_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de $Rg(G)$.

U est ⇝ un schéma. $U \longmapsto Nat(h_U, G)$ est un faisceau sur $|Rg(G)|$

$\Phi_{Rg(G_i)} \simeq G_i$ car G_i est représentable

$G_i \times_G G_j$ peut être