§1 Normes.

Soit K un corps muni d'une valeur absolue $|\cdot|$.

$|\cdot| : K \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que · $\forall\, a \in K^\times$, $|a| > 0$

· $\forall\, a, b \in K$, $|ab| = |a| \cdot |b|$

(inégalité triangulaire) · $\forall\, a, b \in K$, $|a+b| \leqslant |a| + |b|$

On dit que $|\cdot|$ est non-archimédienne si la condition suivante est vérifiée : $\forall\, a, b \in K$, $|a+b| \leq \max(|a|, |b|)$

Sinon, on dit que $|\cdot|$ est archimédienne.

Dans la suite, on suppose que le corps K est complet (toute suite de Cauchy est convergente).

Soit E un espace vectoriel sur K qui est de rang fini. On appelle norme sur E toute application $\|\cdot\| : E \to [0, +\infty[$ telle que

- $\forall\, x \in E$, $x \neq 0 \Rightarrow \|x\| > 0$
- $\forall\, \lambda \in K$, $x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\forall\, x, y \in E$, $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Si K est non-archimédien, on dit que $\|\cdot\|$ est ultramétrique si

$\forall\, x, y \in E$, $\|x+y\| \leqslant \max(\|x\|, \|y\|)$

Soit $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, on désigne par $\|\cdot\|_{\underline{e}}$ la norme telle que

$$\|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n\|_{\underline{e}} = \begin{cases} \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\} & \text{si } |\cdot| \text{ est non-archimédienne,} \\ (|\lambda_1|^2 + \dots + |\lambda_n|^2)^{1/2} & \text{si } |\cdot| \text{ est archimédienne.} \end{cases}$$

Si $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\underline{e}}$, on dit que $\|\cdot\|_{\underline{e}}$ est une base orthonormée de $\|\cdot\|$

Lorsque $|\cdot|$ est archimédienne ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $(E, \|\cdot\|)$ possède une base orthonormée si et seulement si $\|\cdot\|$ est euclidienne / hermitienne.

⚠ Dans le cas où $\|\cdot\|$ est ultramétrique, E ne possède pas nécessairement une base orthogonale.

Construction de normes.

① Somme directe orthogonale.

Soient E et F deux espaces vectoriels de rang fini sur K, munis de normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ respectivement. On définit $\|\cdot\|_{E\oplus F}$ comme la norme sur $E\oplus F$ telle que

$$\|(x,y)\|_{E\oplus F} := \begin{cases} \max(\|x\|_E, \|y\|_F) & \text{si } |\cdot| \text{ est non-archimédienne} \\ \left(\|x\|_E^2 + \|y\|_F^2\right)^{1/2} & \text{si } |\cdot| \text{ est archimédienne} \end{cases}$$

Remarque si $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ sont ultramétrique (resp. euclidienne, hermitienne), alors il en est de même de $\|\cdot\|_{E\oplus F}$

② Produit tensoriel

Soit E un espace vectoriel de rang fini sur K, muni d'une norme. On définit une norme $\|\cdot\|_{E^\vee}$ sur $E^\vee$ comme norme d'opérateur :

$$\|\alpha\|_{E^\vee} := \sup_{0\neq x\in E} \frac{|\alpha(x)|}{\|x\|_E}$$

Si E et F sont deux espaces vectoriels normés, de rang fini sur K, on définit $E\otimes_\varepsilon F$ comme l'espace vectoriel $E\otimes F \cong \mathrm{Hom}_K(E^\vee, F)$ muni de la norme d'opérateur (où on considère la norme duale sur $E^\vee$.

- Si E et F sont ultramétriques, il en est de même de $E\otimes_\varepsilon F$.

⚠ Même si E et F sont euclidiens (hermitiens), $E\otimes_\varepsilon F$ n'est pas euclidien (hermitien) en général.

Dans le cas où E et F sont euclidiens (resp. hermitien) on définit $E\otimes F$ comme l'espace $E\otimes F$ muni de la norme euclidienne (resp. hermitienne) $\langle\,,\,\rangle_{E\otimes F}$ telle que

$$\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle_{E\otimes F} = \langle x_1, x_2\rangle_E \cdot \langle y_1, y_2\rangle_F.$$

Proposition 1.1 On a $\|\cdot\|_{E\otimes F} \geq \|\cdot\|_{E\otimes_\varepsilon F}$. (E et F sont euclidiens/hermitiens)

Démonstration Soient $(e_i)_{i=1}^n$ et $(f_j)_{j=1}^m$ des base orthonormées de E et F respectivement. Alors pour $x = \sum_{i,j} \lambda_{ij}\, e_i \otimes f_j$ on a

$$\|x\|_{E\otimes F} = \Big(\sum_{i,j} \lambda_{ij}^2\Big)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|x\|_{E\otimes_\varepsilon F} = \sup_{a_1^2+\cdots+a_n^2=1} \Big(\sum_{j=1}^m \Big(\sum_{i=1}^n \lambda_{ij} a_i\Big)^2\Big)^{1/2}$$

L'inégalité résulte donc de Cauchy-Schwarz. ✳

③ Déterminant

E un espace vectoriel normé sur K. $r = \mathrm{rg}(E) < +\infty$.

On suppose que E est ultramétrique, euclidien ou hermitien.

On veut définir une norme $\|\cdot\|_{\det E}$ sur $\det E = \Lambda^r E$.

- Si E est ultramétrique, on considère la norme quotient induite par

$$E^{\otimes_\varepsilon r} \longrightarrow \Lambda^r E$$

- Si E est euclidien ou hermitien, on considère la norme induite par le produit scalaire ou hermitien $\langle\,,\,\rangle_{\det E}$ tel que

$$\langle x_1 \wedge \cdots \wedge x_r, y_1 \wedge \cdots \wedge y_r\rangle_{\det E} = \det\big(\langle x_i, y_j\rangle_E\big)_{1\leq i,j\leq r}.$$

Remarque De façon similaire, on peut construire des normes naturelles sur $\Lambda^d E$ où $0 \leq d \leq r$, qui sont ultramétrique (resp. euclidienne hermitienne) si $\|\cdot\|_E$ l'est.

§2 Fibrés adéliques

Soit K un corps. Soit M_K une famille de valeurs absolues sur K.

Si $v \in M_K$, on désigne par $|\cdot|_v$ la valeur absolue correspondante.

On suppose que $\Theta_K = \{n_v \mid v \in M_K\}$ est une famille de nombres
On dit que (K, M_K, Θ_K) est une courbe arithmétique si les conditions suivantes sont vérifiées.

$\forall\ a \in K^\times := K \setminus \{0\}$, il existe un sous-ensemble fini S_a de M_K tel que $|a|_v = 1$ quel que soit $v \in M_K \setminus S_a$. De plus, on a

$$\sum_{v \in M_K} n_v \ln |a|_v = 0$$

<u>Exemple</u> ① K est un corps de nombres. $M_K = \{\text{places de } K\}$
Pour $v \in M_K$, $|\cdot|_v$ est une valeur absolue sur K qui prolonge une valeur absolue p-adique sur $\mathbb{Q}$ $(|p|_v = p^{-1})$ ou la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{Q}$.
$n_v = [K_v : \mathbb{Q}_v]$.

② $K = k(C)$ où C est une courbe projective régulière définie sur un corps k. $M_K = \{\text{points fermés de } C\}$
Pour tout $x \in M_K$, $|\cdot|_x = \exp(-v_x(\cdot))$
valuation définie par $\mathcal{O}_{C,x}$.

$n_x = [k(x) : k]$.

③ K un corps quelconque $M_K = \{0\}$
ensemble à un élément.
$|\cdot|_0$ est la valeur absolue triviale

④ Si (K, M_K, Θ_K) et (K, M'_K, Θ'_K) sont des courbes arithmétiques, alors $(K, M_K \sqcup M'_K, \Theta_K \sqcup \Theta'_K)$ l'est aussi.

Dans la suite, on fixe une courbe arithmétique (K, M_K, Θ_K).

Observation: Si $A \in GL_n(K)$, alors il existe un sous-ensemble fini S_A de M_K tel que $A \in \mathcal{O}_n(K_v)$.

Définition 1.2 On appelle <u>diviseur adélique</u> sur $\operatorname{Spec} K$ tout élément dans $\mathbb{R}^{\oplus M_K}$

On écrit un diviseur adélique sous la forme

$$\zeta = \sum_{v \in M_K} \lambda_v \cdot [v]$$

On note $\widehat{\operatorname{Div}}_{\mathbb{R}}(K)$ l'espace vectoriel des diviseurs adéliques.

Si $\zeta = \sum_{v \in M_K} \lambda_v \cdot [v] \in \widehat{\operatorname{Div}}_{\mathbb{R}}(K)$, on définit

$$\widehat{\deg}(\zeta) := \sum_{v \in M_K} n_v \lambda_v \in \mathbb{R}$$

Fait : $\widehat{\deg} : \widehat{\operatorname{Div}}_{\mathbb{R}}(K) \longrightarrow \mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$-linéaire.

- Si tous les λ_v sont positifs ou nuls, on dit que ζ est effectif. On désigne par $\widehat{\operatorname{Div}}_{\mathbb{R}}(K)_+$ le cône des diviseurs adéliques effectifs
- Si a est un élément de $K^\times$, on définit

$$(a) = \sum_{v \in M_K} -\ln|a|_v \cdot [v] \in \widehat{\operatorname{Div}}_{\mathbb{R}}(K)$$

L'application $(\cdot) : K^\times \longrightarrow \widehat{\operatorname{Div}}_{\mathbb{R}}(K)$ est un homomorphisme de groupes, donc s'étend en une application $\mathbb{R}$-linéaire de $K^\times_{\mathbb{R}} := K^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ vers $\widehat{\operatorname{Div}}_{\mathbb{R}}(K)$ que l'on note encore comme $(\cdot)$.

Tout diviseur adélique dans $\operatorname{Im}\left((\cdot) : K^\times \to \widehat{\operatorname{Div}}_{\mathbb{R}}(K)\right)$ est appelé un diviseur principal. $=: \widehat{\operatorname{PDiv}}_{\mathbb{R}}(K)$

<u>Notation</u> $\widehat{\operatorname{Cl}}_{\mathbb{R}}(K) := \widehat{\operatorname{Div}}_{\mathbb{R}}(K) / \widehat{\operatorname{PDiv}}_{\mathbb{R}}(K)$.

<u>Proposition 1.3</u> Si $\zeta \in \widehat{\operatorname{PDiv}}_{\mathbb{R}}(K)$, alors $\widehat{\deg}(\zeta) = 0$.

<u>Preuve</u> On peut supposer $\zeta = (a)$ avec $a \in K^\times$

L'égalité résulte directement de la formule du produit

<u>Corollaire</u> $\widehat{\deg} : \widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{R}}(K) \longrightarrow \mathbb{R}$ induit une forme linéaire
$$\widehat{\deg} : \widehat{\mathrm{Cl}}_{\mathbb{R}}(K) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

<u>Définition 1.4</u> On appelle fibré adélique sur Spec K toute donnée $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_v)_{v \in M_K})$ où · E est un espace vectoriel de rang fini sur K

$\forall v$, $\|\cdot\|_v$ est une norme sur $E \otimes_K \mathbb{C}_v$, où $\mathbb{C}_v$ est le complété d'une clôture algébrique de K_v (complété de K par rapport à $|\cdot|_v$).

On demande que

- $\|\cdot\|_v$ est invariante par l'action de $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}_v / K_v)$.
- Il existe une base $(e_1, \dots, e_r)$ de E qui est orthonormée pour toute sauf un nombre fini de normes $\|\cdot\|_v$

<u>Notion</u> $(e_1, \dots, e_r)$ est orthonormée pour la norme $\|\cdot\|_v$ si

$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{C}_v^r$,

$$\|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r\|_v = \begin{cases} \max\{|\lambda_1|_v, \dots, |\lambda_r|_v\} & \text{si } v \text{ est non-archimédienne} \\ \left(|\lambda_1|_v^2 + \dots + |\lambda_r|_v^2\right)^{1/2} & \text{si } v \text{ est archimédienne} \end{cases}$$

On dit que $\overline{E}$ est hermitien si chaque norme $\|\cdot\|_v$ possède une base orthogonal (non-nécessairement dans E) pour v archimédien

$(e_1, \dots, e_r)$ une base de $E \otimes_{K_v} \mathbb{C}_v$ est orthogonale si $\dots$

et $\|\cdot\|_v$ est ultramétrique si v est non-archimédienne.

<u>Remarque</u> Si $\mathrm{rg}(E) = 1$, alors $\overline{E}$ est toujours hermitien.

Si $\overline{L}$ est un fibré vectoriel adélique de rang 1, on dit que $\overline{L}$ est un fibré inversible adélique.

On dit que $\overline{L_1}$ est isomorphe à $\overline{L_2}$ s'il existe un isomorphisme $f: L_1 \to L_2$ qui induit une isométrie $L_1 \otimes_K \mathbb{C}_v \to L_2 \otimes_K \mathbb{C}_v$ pour toute v.

On désigne par $\widehat{\mathrm{Pic}}(K)$ le groupe des classes d'isomorphisme de fibrés inversibles adéliques sur Spec K

Loi de groupe : $\overline{L_1} \otimes \overline{L_2} = L_1 \otimes L_2$ muni des normes $\otimes_\varepsilon$.

Si $\overline{L}$ est un fibré inversible adélique sur Spec K et $s \in L$, $s \neq 0$, on définit

$$\widehat{(s)} := \sum_{v \in M_K} (-\ln \|s\|_v) \; [v]$$

Si s' est un autre élément non-nul de L, alors $\widehat{(s')} - \widehat{(s)}$ est un diviseur adélique principal. On obtient ainsi

$$\hat{c}_1(\cdot) : \widehat{\mathrm{Pic}}(K) \longrightarrow \widehat{Cl}_{\mathbb{R}}(K).$$

qui est un morphisme de groupes.

C'est en fait un isomorphe de groups :

Si $\zeta = \sum_{v \in M_K} \lambda_v \cdot [v]$, on définit un fibré inversible adélique $\overline{\mathcal{O}}(\zeta)$ comme la suite :

- L'espace vectoriel sous-jacent est K
- Pour tout $v \in M_K$, $\|1\|_v = \exp(-\lambda_v)$

On a $\overline{\mathcal{O}}(\zeta + \zeta') \cong \overline{\mathcal{O}}(\zeta) \otimes \overline{\mathcal{O}}(\zeta')$

Conséquence : $\widehat{\mathrm{Pic}}(K)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique sur Spec K qui est hermitien. On désigne par $\det \overline{E}$ le déterminant de E muni des normes déterminants. C'est un fibré inversible adélique sur Spec K.

On définit $\hat{c}_1(\overline{E})$ comme $\hat{c}_1(\det(\overline{E}))$
et $\widehat{\deg}(\overline{E}) := \widehat{\deg}(\hat{c}_1(\overline{E}))$.

§3 Théorie de pentes et de Harder-Narasimhan.

Dans ce paragraphe, tout fibré vectoriel adélique est hermitien.
On appelle suite exacte de fibrés vectoriels adéliques tout diagramme

$$0 \to \overline{E}' \xrightarrow{f} \overline{E} \xrightarrow{g} \overline{E}'' \longrightarrow 0$$

où $0 \to E' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte d'espaces vectoriels sur K, les métriques de $\overline{E}'$ sont des normes induites, les métriques de $\overline{E}''$ sont des normes quotients.

<u>Proposition 3.1</u> Si $0 \to \overline{E}' \to \overline{E} \longrightarrow \overline{E}'' \to 0$ est une suite exacte de fibrés vectoriels adéliques hermitiens, alors

$$\det(\overline{E}) \cong \det(\overline{E}') \otimes \det(\overline{E}'').$$

En particulier, $\widehat{\deg}(\overline{E}) = \widehat{\deg}(\overline{E}') + \widehat{\deg}(\overline{E}'')$

<u>Démonstration</u> Vérification des isométries place par place.

Si v est archimédienne, on construit une base orthonormée de $E \otimes_K \mathbb{C}_v$ à partir d'~~es~~ bases orthonormées de $E' \otimes_K \mathbb{C}_v$ et $E'' \otimes_K \mathbb{C}_v$ respectivement.

⚠ pour une place non-archimédienne, bien que les normes sont ultramétrique, il est possible que une base orthogonale n'existe pas. Alternativement, on utilise le lemme suivant

Lemme Soit k un corps valué complet non-archimédien.
V un espace vectoriel de rang $r<+\infty$ sur k, muni d'une ultra-normes.
et $0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_r = V$ un drapeau complet de sous-espaces vectoriels de V. Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, il existe une base $\underline{e} = (e_1, \cdots, e_r)$ compatible au drapeau ($\underline{e} \cap V_i$ a exactement i éléments) et telle que (ε-orthogonal)

$$\forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \in k^r, \quad \|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r\| \geqslant (1-\varepsilon) \max_{i \in \{1,\cdots,r\}} |\lambda_i| \cdot \|e_i\|$$

Démonstration On raisonne par récurrence sur le rang r.
Le cas où $r=1$ est trivial. Dans la suite, on suppose que le lemme a été démontré pour les espaces vectoriels ultranormés de rang $\leqslant r-1$. On applique l'hypothèse de récurrence à V_{r-1} pour obtenir une base $(e_1, \cdots e_{r-1})$ compatible au drapeau et est ε-orthogonal
Soit $x \in V \setminus V_{r-1}$. Comme V_{r-1} est fermé dans V (la topologie sur V est égale à cette de k^r pour n'importe quel isomorphisme $k^r \xrightarrow{\sim} V$). il existe $y \in V_{r-1}$ tel que

$$\|x - y\| \leqslant (1-\varepsilon)^{-1} \operatorname{dist}(x, V_{r-1}).$$

On choisit $e_r = x - y$.
$(e_1, \cdots, e_r)$ est une base de V compatible au drapeau.
Si $z = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r \in V$, alors

$$\|z\| \geqslant |\lambda_r| \cdot \operatorname{dist}(x, V_{r-1}) \geqslant (1-\varepsilon) |\lambda_r| \cdot \|e_r\|$$

En même temps, comme $\|\cdot\|$ est ultramétrique

$$\|z\| \leqslant \max\left(|\lambda_r| \cdot \|e_r\|, \|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{r-1} e_{r-1}\| \right)$$

Le résultat est donc vérifié si $|\lambda_r| \cdot \|e_r\| \geqslant \|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{r-1} e_{r-1}\|$
Si $\|\lambda_r \cdot e_r\| < \|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{r-1} e_{r-1}\|$, alors $\|z\| = \|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{r-1} e_{r-1}\|$
$\Rightarrow \|z\| \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant r-1} (1-\varepsilon) |\lambda_i| \cdot \|e_i\|$. Le résultat est démontré.

Proposition 3.2 Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique qui est hermitien. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors on a

$$\widehat{\deg}(\overline{F\cap G}) + \widehat{\deg}(\overline{F+G}) \geq \deg(\overline{F}) + \deg(\overline{G})$$

Démonstration Vérification place par place.

Supposons v archimédienne.

Soient $\{x_1, \dots, x_r\}$ une base orthonormée de $(F\cap G)_{\mathbb{C}_v}$

Complétons le en $\{x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_m\}$ une base orthonormée de F

$\{x_1, \dots, x_r, z_1, \dots, z_n\}$ une base orthonormée de G

$\rightsquigarrow$ $\{x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n\}$ est une base de $F+G$

On a

$$1 = \|x_1\wedge\cdots\wedge x_r\wedge y_1\wedge\cdots\wedge y_m\|_v \cdot \|x_1\wedge\cdots\wedge x_r\wedge z_1\wedge\cdots\wedge z_n\|_v$$

$$\geq \|x_1\wedge\cdots\wedge x_r\|_v \cdot \|x_1\wedge\cdots\wedge x_r\wedge y_1\wedge\cdots\wedge y_m\wedge z_1\wedge\cdots\wedge z_n\|_v$$

(l'inégalité d'Hadamard).

La partie ultramétrique se démontre de façon similaire, en utiliant le lemme. $\#$

Pente Si $\overline{E}$ est non-nul, on définit

$$\hat{\mu}(\overline{E}) = \widehat{\deg}(\overline{E}) / \mathrm{rg}(E).$$

Théorème 3.3. Soit $\overline{E}$ un fibré adélique hermitien non-nul sur $\mathrm{Spec}\, K$, alors il existe un unique sous-espace vectoriel $E_{des} \subset E$ qui vérifie les conditions suivantes.

① $\hat{\mu}(\overline{E}_{des}) = \sup_{0\neq F\subset E} \hat{\mu}(\overline{F})$ (noté comme $\hat{\mu}_{max}(\overline{E})$)

② Si $0\neq F\subset E$ est tel que $\hat{\mu}(\overline{F}) = \hat{\mu}_{max}(\overline{E})$, alors $F \subset E_{des}$.

Le théorème peut être démontré dans un cadre un peu plus général.

Soit E un espace vectoriel de rang fini sur un corps K.

Supposons donné une fonction

$$d : \underbrace{\{\text{sous-espaces vectoriels de } E\}}_{\Theta_E} \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que $\forall\ F, G \in \Theta_E$

$$d(F \cap G) + d(F+G) \geq d(F) + d(G).$$

On définit $\mu : \Theta_E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

$$\mu(F) = d(F) / rg(F) \qquad (\text{si } F = \{0\}.\ \ \mu(\{0\}) = -\infty).$$

<u>Théorème 3.3</u>^{bis} Il existe un unique $E_{des} \in \Theta_E$ tel que

① $\mu(E_{des}) = \mu_{max}(E) := \sup_{F \in \Theta_E} \mu(F)$

② Si $\mu(F) = \mu_{max}(E)$, alors $F \subset E_{des}$.

<u>Démonstration</u> On raisonne par récurrence sur le rang r de E.

Le cas où $r=1$ est trivial. On suppose $r>1$.

Si $\forall\ F \in \Theta_E \quad \mu(F) \leq \mu(E)$, alors $E_{des} = E$

Sinon on prend $E' \in \Theta_E$ tel que $\mu(E') > \mu(E)$ et $rg(E')$ le plus grand possible

On a $rg(E') < r$ et $\Theta_{E'} \subset \Theta_E$. $\underset{\text{hypothèse de récurrence}}{\Longrightarrow}$ $\exists\ E'_{des}$

On a $\mu(E'_{des}) \geq \mu(E') > \mu(E)$. Montrons $E_{des} = E'_{des}$ vérifie les conditions ① et ②

① Soit $F \in \Theta_E$. Si $F \subset E'$ alors $\mu(F) \leq \mu(E')$.

Sinon $rg(F+E') > rg(E')$ et $\mu(F+E') \leq \mu(E)$.

On a $\deg(F+E') + \deg(F\cap E') \geq \deg(F) + \deg(E') = \deg(F) + rg(E')\,\mu(E')$

$\geq rg(F+E')\,\mu(E) + \deg(F\cap E')$

$> rg(F+E')\,\mu(E') + \deg(F\cap E')$

$\geq rg(F+E')\,\mu(E') + rg(F\cap E')\,\mu(E'_{des})$

$\Rightarrow \deg(F) < (rg(E'+F) - rg(E'))\,\mu(E') + rg(F\cap E')\,\mu(E'_{des}) \leq rg(F)\,\mu(E'_{des})$

Inégalité est stricte lorsque $F \not\subset E'$

$\divideontimes$