§4 Le cas d'une place triviale

On considère le cas particulier d'une courbe arithmétique (K, M_K, Φ_K) avec $M_K = \{|\cdot|_0\}$ ← valeur absolue triviale

$\mathbb{C}_0 = \overline{K}$ muni de la valeur absolue triviale

Un fibré vectoriel adélique sur Spec K :

$\overline{E} = (E, \|\cdot\|)$ où E est un espace vectoriel de rang fini sur K

$\|\cdot\|$ est une norme sur $E \otimes_K \overline{K}$, invariante par l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$:

$\forall\ \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, $x_1, \dots x_n \in E$, $a_1, \dots, a_n \in \overline{K}$

$$\|x_1 \otimes a_1 + \dots + x_n \otimes a_n\| = \|x_1 \otimes \sigma(a_1) + \dots + x_n \otimes \sigma(a_n)\|$$

Dans la suite, on suppose $\|\cdot\|$ est ultramétrique.
(c'est-à-dire que $\overline{E}$ est hermitien)

<u>Proposition 4.1</u> Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}^t(E_{\overline{K}}) := \{ y \in E \mid \|y\| \leq e^{-t} \}$ est un sous-espace vectoriel de $E_{\overline{K}}$

<u>Démonstration</u>

$\|\cdot\|$ est une ultranorme $\Rightarrow$ $\mathcal{F}^t(E_{\overline{K}})$ est stable par l'addition

$|\cdot|_0$ est triviale $\Rightarrow$ $\mathcal{F}^t(E_{\overline{K}})$ est stable par la multiplication par un scalaire

<u>Remarque</u> $\mathcal{F}^t(E_{\overline{K}})$ est invariant pour l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F}^t(E_{\overline{K}}) = (\mathcal{F}^t E)_{\overline{K}}$.

$(\mathcal{F}^t E)_{t \in \mathbb{R}}$ est une $\mathbb{R}$-filtration décroissante de E. $\left(\mathcal{F}^t E \subset \mathcal{F}^s E \text{ si } t \geq s \right)$

Réciproquement, si on commence par une $\mathbb{R}$-filtration $\mathcal{F}$ en sous-espaces vectoriels de E, alors $\|\cdot\| : E_{\overline{K}} \to \mathbb{R}$

$$\|x\| := \exp\left(-d_{\mathcal{F}}(x)\right) \qquad d_{\mathcal{F}}(x) = \sup\left\{ t \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \in (\mathcal{F}^t E)_{\overline{K}} \right\}$$

est une norme ultramétrique sur $E_{\overline{K}}$, invariante par $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

Convention :

Soit $\mathcal{F}$ une $\mathbb{R}$-filtration décroissante sur un espace vectoriel de rang fini E sur K. On suppose par convention que

① $\mathcal{F}$ est séparée : $\mathcal{F}^t E = \{0\}$ lorsque t est suffisamment positif.

② $\mathcal{F}$ est exhaustive : $\mathcal{F}^t E = E$ lorsque t est suffisamment négatif

③ La fonction $G_{\mathcal{F}} : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $G_{\mathcal{F}}(t) = \mathrm{rg}(\mathcal{F}^t E)$ est continue à gauche.

La donnée de $\mathcal{F}$ correspond à une suite de nombres

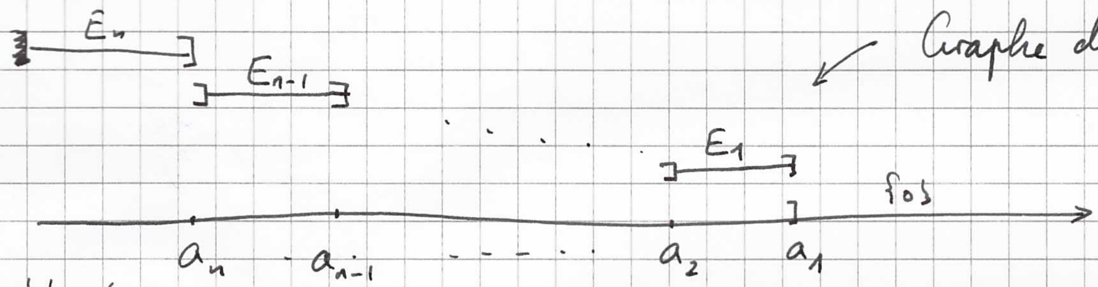
$$+\infty = a_0 > a_1 > \cdots > a_n > a_{n+1} = -\infty$$

($a_1, \cdots, a_n$ sont des points de saut de la filtration $\mathcal{F}$)

et un drapeau de sous-espaces vectoriels de E :

$$\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_n = E$$

tels que $\mathcal{F}^t E = E_i$ pour $t \in \mathbb{R} \cap]a_{i+1}, a_i]$



Graphe de la fonction $G_{\mathcal{F}}$

Proposition 4.2

On a $$\widehat{\deg}(\overline{E}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{rg}(E_i/E_{i-1}) \cdot a_i = - \int_{\mathbb{R}} t \, \underline{d\, G_{\mathcal{F}}(t)}$$

$$= - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{rg}(E_i/E_{i-1}) \delta_{a_i}$$

Si $\overline{E}$ est le fibré vectoriel adélique (hermitien) défini par la filtration $\mathcal{F}$.

Démonstration Pour tout vecteur $x \in E_i \setminus E_{i-1}$, on a $\|x\| = e^{-a_i}$

On prend une base $\underline{e} = (e_j)_{j=1}^{r}$ telle que $\#(\underline{e} \cap E_i) = \mathrm{rg}(E_i)$

On a alors $\underline{e}$ est une base orthogonale de E. d'où

$$\|e_1 \wedge \cdots \wedge e_r\| = \prod_{j=1}^{r} \|e_j\| = \exp\left(- \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathrm{rg}(E_i/E_{i-1})\right)$$

※

Observation Si $E \neq \{0\}$

$$-\ln \sup_{x \in E} \|x\| = a_n \leqslant \hat{\mu}(\overline{E}) \leqslant a_1 = -\ln \inf_{0 \neq x \in E} \|x\|$$

Corollaire ① $\hat{\mu}_{max}(\overline{E}) = a_1$

② $E_{des} = E_1$.

Démonstration ① Pour tout $F \subset E$, on a $\inf_{0 \neq x \in F} \|x\| \geqslant \inf_{0 \neq x \in E} \|x\|$

Donc $\hat{\mu}(\overline{F}) \leqslant a_1$.

En outre, $\hat{\mu}(\overline{E}_1) = a_1$. On obtient alors $\hat{\mu}_{max}(\overline{E}) = a_1$.

② Si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel non-nul tel que $\hat{\mu}(F) = a_1$, alors pour tout ~~x∈F~~ $x \in F \setminus \{0\}$ on a $\|x\| = e^{-a_1}$ car sinon on aurait $\hat{\mu}(F) < a_1$.

Donc $F \subset E_1$ ⁂

Corollaire $\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \dots \subsetneq E_n = E$ est la filtration de Harder-Narasimhan de $\overline{E}$.

§5 Projection à la place triviale

On considère une courbe arithmétique générale $(K, M_K, \textcircled{H}_K)$.

Dans §3 on a construit le drapeau de Harder-Narasimhan

$$\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \dots \subsetneq E_n = E$$

et on a vérifié que, si on note $a_i = \hat{\mu}(\overline{E}_i/\overline{E}_{i-1})$, alors

$$a_1 > a_2 > \dots > a_n.$$

Cela nous permet de construire une $\mathbb{R}$-filtration décroissante $\mathcal{F}^{HN}$ ou de façon équivalente, une norme $\|\cdot\|_{HN}$ ultramétrique par rapport à la valeur absolue triviale de K.

Ce procédé préserve la filtration de Harder-Narasimhan ainsi que les pente successives. On a en particulier

$$\widehat{\deg}(\overline{E}) = \widehat{\deg}(E, \|\cdot\|_{HN}) \qquad \hat{\mu}_{max}(\overline{E}) = \hat{\mu}_{max}(E, \|\cdot\|_{HN}) \text{ etc.}$$

On peut projeter d'autres invariants arithmétique à la géométrie arithmétique relativement à la place triviale.

Hauteur

Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique sur Spec K.

Pour tout sous-espace vectoriel L de rang 1 de E,

$\overline{L}$ est un fibré inversible adélique.

On définit la hauteur de tout élément non-nul $x \in L$ comme $h_{\overline{E}}(x) := \widehat{\deg}(\overline{L})$.

On peut calculer $h_{\overline{E}}(x)$ comme

$$h_{\overline{E}}(x) = - \sum_{v \in M_K} n_v \ln \|x\|_v$$

Forme exponentiel : $H_{\overline{E}}(\cdot) = \exp\left(h_{\overline{E}}(\cdot)\right)$

Fait $\forall\, a \in K^{\times}$, $h_{\overline{E}}(ax) = h_{\overline{E}}(x)$.

On construit une filtration sur E comme la suite

$$\mathcal{F}^{t}_{\min} E := \mathrm{Vect}_K \left\{ 0 \neq x \in E \;\middle|\; h_{\overline{E}}(x) \leqslant -t \right\}$$

Minima successif (à la Roy-Thunder)

$\forall\, i \in \{1, \dots, \mathrm{rk}(\overline{E})\}$

$$\lambda_i(\overline{E}) := \inf \left\{ r > 0 \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{l'ensemble } \{x \in E \setminus \{0\} \mid H_{\overline{E}}(x) \leqslant r\} \\ \text{contient } i \text{ vecteurs } K\text{-linéairements indépents} \end{array} \right\}$$

Les points de saut de $\mathcal{F}_{\min}$ sont $\left(-\ln \lambda_i(\overline{E})\right)_{1 \leqslant i \leqslant \mathrm{rg}(E)}$ où on compte les multiplicité.

On a la relation suivante

$$\widehat{\deg}(E, \|\cdot\|_{\min}) + \ln\left(\prod_{i=1}^{\mathrm{rg}(E)} \lambda_i(\overline{E})\right) = 0.$$

correspondant à la filtration $\mathcal{F}_{\min}$

Minima successifs absolus (Soulé, Thunder)

Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique sur Spec K.

Si K' est une extension finie et séparable de K, on désigne par $M_{K'}$ l'ensemble des valeurs absolues sur K' qui prolonge l'une des valeurs absolues dans M_K.

(si $w \in M_{K'}$ prolonge $v \in M_K$, on note $w|v$).

on prend $n_w = [K'_w : K_v] n_v$

On a $\mathbb{C}_w = \mathbb{C}_v$ (avec la même valeur absolue).

Donc la donnée des normes dans $\overline{E}$ définit une structure de fibré vectoriel adélique sur $E \otimes_K K'$. On le note comme $\overline{E} \otimes_K K'$.

<u>Remarque</u> ① Pour tout $a \in K' \setminus \{0\}$, on a

$$\sum_{w \in M_{K'}} n_w \ln |a|_w = \sum_{v \in M_K} n_v \sum_{\substack{w \in M_{K'} \\ w|v}} [K'_w : K_v] \ln |a|_w$$

$$= \sum_{v \in M_K} n_v \ln |N_{K'/K}(a)|_v = 0.$$

② $\widehat{\deg}(\overline{E} \otimes_K K') = [K' : K] \widehat{\deg}(\overline{E})$.

(Il suffit de vérifier le cas où E est de rang 1).

Si $x \in E$ est non-nul.

$$\widehat{\deg}(\overline{E} \otimes_K K') = \sum_{w \in M_{K'}} n_w \ln \|x\|_w = \sum_{v \in M_K} n_v \sum_{\substack{w \in M_{K'} \\ w|v}} [K'_w : K_v] \ln \|x\|_v$$

$$= [K' : K] \sum_{v \in M_K} n_v \ln \|x\|_v = [K' : K] \widehat{\deg}(\overline{E}).$$

<u>Définition</u> 5.1. Si x est un élément non-nul de $E \otimes_K \overline{K}$, K' est une extension finie et séparable de K ~~qui~~ telle que $x \in E_{K'}$

On définit la hauteur relative de x comme

$$h_{\overline{E}}(x) := \frac{1}{[K':K]} \widehat{\deg}(\overline{K'x}) \qquad H_{\overline{E}}(x) = \exp(h_{\overline{E}}(x))$$

où on considère $K'x$ comme un sous-espace vectoriel de rang 1 de $E \otimes_K K'$.

<u>Remarque</u> La définition de $h_{\overline{E}}(x)$ ne dépend pas du choix de l'extension K'/K.

<u>Minima successif absolue</u> (Soulé).

$\forall \; i \in \{1, \dots, rg(E)\}$

$$\lambda_i^{ab}(\overline{E}) := \inf \left\{ r>0 \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{l'ensemble } \{x \in E_{\overline{K}} \setminus \{0\} \mid H_{\overline{E}}(x) \leq r\} \\ \text{Contient } i \text{ vecteurs } \overline{K}\text{-linéairement indépendants} \end{array} \right\}$$

On construit une filtration de $E_{\overline{K}}$

$$\mathcal{F}^t_{ht} E_{\overline{K}} := \mathrm{Vect}_{\overline{K}} \{ 0 \neq x \in E_{\overline{K}} \mid h_{\overline{E}}(x) \leq -t \}.$$

On a la relation suivante:

$$\widehat{\deg}(E_{\overline{K}}, \|\cdot\|_{ht}) + \ln\left(\prod_{i=1}^{rg(E)} \lambda_i^{ab}(\overline{E}) \right) = 0 .$$

correspondant à la filtration $\mathcal{F}_{ht}$.

§6 Le lien avec la géométrie ~~algébrique~~ des nombres classique.

Soit V un espace euclidien. On appelle réseau dans V tout sous-groupe additif Ω de V qui est discrète et tel que $\Omega_{\mathbb{R}} = V$.

<u>Remarque</u>: • Ω est un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini

• Il existe une base $(e_i)_{i=1}^r$ de Ω sur $\mathbb{Z}$ où r s'identifie au rang de l'espace vectoriel V.

- Le parallélotope engendré par $(e_i)_{i=1}^r$

  $\{ \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r \mid \forall i \ \ \lambda_i \in [0,1] \}$

  est appelé un domaine fondamental de Ω.

À partir de Ω on peut construire un fibré vectoriel adélique.

Soit S la courbe arithmétique $(\mathbb{Q}, M_{\mathbb{Q}}, \Theta_{\mathbb{Q}})$ où

$M_{\mathbb{Q}} = \{$valeur absolue p-adique ou valeur absolue usuelle$\}$

Si p est un nombre premier, $|p|_p := p^{-1}$ par convention.

$\Theta_{\mathbb{Q}} = (1)_{v \in M_{\mathbb{Q}}}$

Formule du produit $\prod_{v \in M_{\mathbb{Q}}} |a|_v = 1$ si $a \in \mathbb{Q}^\times$.

À partir de Ω on peut construire une structure de fibré vectoriel adélique sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Q}$:

$E = \Omega \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Si ~~p~~ $v \in M_{\mathbb{Q}}$, v ultramétrique alors v correspond à un nombre premier p.

Soit $\mathbb{Z}_{(p)}$ la localisation de $\mathbb{Z}$ par rapport à l'idéal (p).

C'est l'anneau de valuation de $\mathbb{Q}$ par rapport à $|\cdot|_p$

$\mathbb{Z}_{(p)} = \{ a \in \mathbb{Q} \mid |a|_p \leq 1 \}$.

On peut définir une norme sur E dont la boule unité fermée est $\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$

~~Plus pé~~ De façon similaire, si $\mathcal{O}_p$ désigne l'anneau de valuation de $\mathbb{C}_p$, on construit une norme $\|\cdot\|_p$ sur $E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}_p$ telle que

$$\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_p = \{ x \in E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}_p \mid \|x\|_p \leq 1 \}.$$

Autrement dit

$$\|x\|_p = \inf\{ |a|_p \mid a \in \mathbb{C}_p ,\ a^{-1}x \in \Omega \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_p \}.$$

Dans le cas où $v = \infty$, la structure d'espace euclidien sur $\Omega_{\mathbb{R}} = V$ induit un produit hermitien sur $E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ tel que

$$\langle x+iy,\ x'+iy' \rangle = \left(\langle x, x' \rangle + \langle y, y' \rangle \right) + i \left(\langle x, y' \rangle - \langle y, x' \rangle \right).$$

$\rightsquigarrow$ $\overline{E}$ est un fibré vectoriel adélique sur S