§ 1 Fibré vectoriels

Soit X un espace annelé. On appelle (faisceau) $\mathcal{O}_X$-module tout faisceau en groupes abéliens $\mathcal{F}$ sur X muni d'un morphisme $\mathcal{O}_X \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ tel que, pour tout ouvert $\mathcal{U} \subset X$, l'application $\mathcal{O}_X(\mathcal{U}) \times \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ définit une structure de $\mathcal{O}_X(\mathcal{U})$-module sur $\mathcal{F}(\mathcal{U})$.

- $\mathrm{Supp}(\mathcal{F}) := \{x \in X \mid \mathcal{F}_x = 0\}$
- On dit que $\mathcal{F}$ est engendré par ses sections globales s'il existe un ensemble I et un homomorphisme surjectif $\varphi : \mathcal{O}_X^{\oplus I} \longrightarrow \mathcal{F}$ ($\forall x \in X$, $\varphi_x : \mathcal{O}_{X,x}^{\oplus I} \longrightarrow \mathcal{F}_x$ est une application surjective).
- On dit que $\mathcal{F}$ est de type fini si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de x, un entier $p \geqslant 0$ et un homomorphisme surjectif $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}^{\oplus p} \longrightarrow \mathcal{F}|_{\mathcal{U}} := \iota_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathcal{F})$ où $\iota_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to X$ est l'application d'inclusion
- On dit que $\mathcal{F}$ est de présentation finie si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$, deux entier p et q dans $\mathbb{N}$, et un homomorphisme $\varphi : \mathcal{O}_{\mathcal{U}}^{\oplus p} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{U}}^{\oplus q}$ tels que $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}}$ soit isomorphe au conoyau de φ.
- On dit que $\mathcal{F}$ est localement libre si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ tel que $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}}$ soit isomorphe à un $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$-module de la forme $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}^{\oplus I}$, où I est un ensemble.
- On dit que $\mathcal{F}$ est un fibré vectoriel s'il est localement libre de type fini.

<u>Lemme 4.1</u> Soit A un anneau non-nul. Si m et n sont deux entiers dans $\mathbb{N}$ tels que $A^m \cong A^n$, alors $m = n$.

<u>Preuve</u> Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Si $\varphi : A^m \longrightarrow A^n$ est un homomorphisme surjectif, il ~~exist~~ induit $\varphi_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}}^m \longrightarrow A_{\mathfrak{p}}^n$ surjectif. Par produit tensoriel par $\kappa(\mathfrak{p})$, on obtient $\kappa(\mathfrak{p})^m \longrightarrow \kappa(\mathfrak{p})^n$ surjectif $\Rightarrow m \geqslant n$.

<u>Corollaire</u> Soient X un espace annelé et E un fibré vectoriel sur X, alors, pour tout $x \in X$ il existe un unique entier $n(x)$ tel que $E_x \simeq \mathcal{O}_{X,x}^{\oplus n(x)}$. En outre, la fonction $n(\cdot) : X \to \mathbb{N}$ est localement constante. (appelé la fonction de rang de E).

Si $n(x) = m$ pour tout $x \in X$, on dit que E est un fibré vectoriel de rang m. Si de plus $m=1$, on dit que E est un fibré inversible.

§2 Quelques outils d'algèbres commutative.

<u>Théorème 2.1</u> (Cayley-Hamilton) Soient A un anneau, I un idéal de A et M un A-module. On suppose que M est engendré par n éléments $(x_1, \dots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Si $\varphi : M \to M$ est un endomorphisme tel que $\varphi(M) \subset IM$, alors il existe un polynôme

$$P(X) = X^n + p_1 X^{n-1} + \cdots + p_n \in A[X]$$

tel que $P(\varphi) = 0$ et $p_j \in I^j$ quelque soit $j \in \{1, \dots, n\}$.

<u>Démonstration</u> Soit H une matrice de taille $n \times n$ à coefficients dans I. tel que

$$\begin{pmatrix} \varphi(x_1) \\ \vdots \\ \varphi(x_n) \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

alors $P(X) = \det(XI - H)$ vérifie les conditions du théorème.

<u>Corollaire</u> Soient A un anneau et M un A-module de type fini.

1) Si $\varphi : M \to M$ est un homomorphisme surjectif, alors il est un isomorph.
2) Si M est isomorphe à $A^{\oplus n}$ et si $(x_1, \dots, x_n)$ est un système de générateurs de taille n, alors $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de M.

<u>Démonstration</u> 1) On considère M comme un $A[X]$-module, où l'action d'un polynôme $f(X) \in A[X]$ sur M est donnée par $f(\varphi)$. Soit $I \subset A[X]$ l'idéal engendré par X. Comme φ est surjectif, on a $IM = M$. Donc il existe $P(Y) = Y^n + p_1 Y^{n-1} + \dots + p_n$ tel que $p_i \in I$ et $P(\mathrm{Id}_M) = 0$. Cela donne la construction de φ^{-1}

2) On suppose que $\varphi : M \to A^{\oplus n}$ est un isomorphisme.
Soit $\psi : A^{\oplus n} \to M$. $\psi(a_1, \dots, a_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$.
Alors $\psi\varphi : M \to M$ est surjectif, donc est un isomorphisme.
On en déduit que ψ est également un isomorphisme.

Corollaire Soient A un anneau et I un idéal de A. Si M est un A-module de type fini tel que $IM = M$, alors il existe $r \in I$ tel que $(1-r)M = 0$

Démonstration D'après le théorème, il existe
$$P(X) = X^n + p_1 X^{n-1} + \dots + p_n \in A[X]$$
tel que $P(Id_M) = 0$ et $p_i \in I$. Si on prend $r = -(p_1 + \dots + p_n)$ on obtient le résultat.

Définition 2.2 Soit A un anneau. On appelle radical de A l'intersection de tous les idéaux maximaux de A, noté comme R_A.

Propriété 2.3 $x \in R_A \iff \forall y \in A,\ 1 - xy \in A^\times$

Preuve "$\Rightarrow$" Soit $x \in R_A$. $\forall y \in A$ on a $xy \in R_A$.
Il suffit de vérifier que $x \in R_A \Rightarrow 1 - x \in A^\times$.
En effet, si $1 - x \notin A^\times$, il existe un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A contenant $1-x$. Or $x \in \mathfrak{m}$, on obtient $1 \in \mathfrak{m}$, absurde.

"$\Leftarrow$" Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal. Si $x \notin \mathfrak{m}$, alors $\exists\, y \in \mathfrak{m}$ et $a \in A$ tel que $ax + y = 1$. Donc $1 - ax = y \in \mathfrak{m}$.
Or $1 - ax$ est inversible. Cela est absurde.

Corollaire (Lemme de Nakayama) Soit A un anneau, $\mathfrak{a}$ un idéal de A contenu dans R_A, et M un A-module de type fini

1) si $\mathfrak{a}M = M$, alors $M = 0$

2) Si $x_1, \dots, x_n$ sont des éléments de M tels que leur images dans $M/\mathfrak{a}M$ forment un système de générateurs de M, alors $\{x_1, \dots, x_n\}$ est un

système de générateurs de M

Preuve 1) Il existe $r \in \mathfrak{a}$ tel que $(1-r)M = 0$. Or $1-r$ est inversible car $r \in R_A$. Donc $M = 0$

2) Soit N le sous-module de M engendré par $x_1, \dots, x_n$. On a

$$(M/N) / \mathfrak{a}(M/N) \cong M/(\mathfrak{a}M + N) \cong M/M = 0$$

Donc $M/N = \mathfrak{a}(M/N) \Rightarrow M/N = 0$.

Proposition 2.4 Soit X un espace localement annelé. Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module de type fini, alors

$$\mathrm{supp}(\mathcal{F}) = \{x \in X \mid \mathcal{F}(x) \neq 0\}$$

où $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_x / m_x \mathcal{F}_x$

Preuve. $\mathcal{F}_x$ est un $\mathcal{O}_{X,x}$-module de type fini.

Donc $\mathcal{F}(x) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{F}_x = m_x \mathcal{F}_x \Leftrightarrow \mathcal{F}_x = 0$.

Proposition 2.5 Soit X un espace annelé, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module de présentation fini. Si $\mathcal{G}$ est un $\mathcal{O}_X$-module et si $x \in X$, alors l'homomorphisme canonique de $\mathcal{O}_{X,x}$-modules

$$\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$$

est un isomorphisme, où $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ désigne le faisceau $U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}_{|U}, \mathcal{G}_{|U})$

Démonstration Le problème étant local, on suppose que $\mathcal{F}$ est le conoyau d'un homomorphisme $\varphi : \mathcal{O}_X^{\oplus p} \to \mathcal{O}_X^{\oplus q}$

La suite exacte $\mathcal{O}_X^{\oplus p} \to \mathcal{O}_X^{\oplus q} \to \mathcal{F} \to 0$ induit une suite exacte $0 \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathcal{G}^{\oplus q} \to \mathcal{G}^{\oplus p}$

En effet, pour tout ouvert U, on a

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}_{|U}, \mathcal{G}_{|U}) \to \mathcal{G}(U)^{\oplus q} \to \mathcal{G}(U)^{\oplus p}$$

En prenant la limite inductive filtrante $\varinjlim_{U \ni x}$, on obtient

$$0 \to (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))_x \to \mathcal{G}_x^{\oplus q} \to \mathcal{G}_x^{\oplus p}.$$

En outre, si on applique $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(-, \mathcal{G}_x)$ à la suite exacte

$$\mathcal{O}_{X,x}^{\oplus p} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}^{\oplus q} \longrightarrow \mathcal{F}_x \longrightarrow 0,$$

on obtient une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x) \longrightarrow \mathcal{G}_x^{\oplus q} \longrightarrow \mathcal{G}_x^{\oplus p}$$

d'où le résultat. ☆

<u>Corollaire</u> Soient X un espace annelé, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux $\mathcal{O}_X$-module de présentation finie, et $x \in X$. Si $\mathcal{F}_x$ et $\mathcal{G}_x$ sont isomorphe, alors il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\mathcal{F}|_U$ et $\mathcal{G}|_U$ soient des $\mathcal{O}_U$-modules isomorphes.

<u>Démonstration</u> D'après la proposition, il existe un voisinage ouvert V de x, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{F}|_V, \mathcal{G}|_V)$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{G}|_V, \mathcal{F}|_V)$ tels que f_x et g_x soient inverses l'un à l'autre. Donc il existe un voisinage ouvert U, $U \subset V$ tel que $f|_U$ et $g|_U$ soient inverses l'un à l'autre. ☆

<u>Proposition</u> Soient X un espace annelé et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module de présentation finie, et $x \in X$. Si $\mathcal{F}_x$ est un $\mathcal{O}_{X,x}$-module libres, alors il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\mathcal{F}|_U$ soit un $\mathcal{O}_U$-module libre.

<u>Démonstration</u> Par définition, il existe un $\mathcal{O}_X$-module libre de rang fini $\mathcal{G}$ tel que $\mathcal{F}_x \cong \mathcal{G}_x \rightsquigarrow \exists U.\ \mathcal{F}|_U \cong \mathcal{G}|_U$.
(Un module libre de rang fini est de présentation finie).

§3 Le cas d'un schéma affine.

Soient X un espace annelé et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module. Si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x, deux ensembles I et J, ainsi qu'un homomorphisme $\varphi : \mathcal{O}_U^{\oplus I} \to \mathcal{O}_U^{\oplus J}$ tels que $\mathcal{F}|_U$ soit isomorphe au conoyau de φ, on dit que $\mathcal{F}$ est <u>quasi-cohérent</u>.

Soit A un anneau. Pour tout A-module M, on désigne par $\tilde{M}$ le faisceau engendré par le préfaisceau $D(\mathfrak{a}) \mapsto M[S(\mathfrak{a})^{-1}]$
où $D(\mathfrak{a}) = \operatorname{Spec} A \setminus V(\mathfrak{a})$. $S(\mathfrak{a}) = A \setminus \left(\bigcup_{\mathfrak{p} \in D(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} \right)$.

$\tilde{M}$ est un $\tilde{A}$-module. De plus, pour tout $f \in A$ on a $\tilde{M}(D(f)) \cong M[f^{-1}]$

<u>Lemme</u> Soient A un anneau et $(M_i)_{i \in I}$ est un foncteur d'une catégorie petite I vers la catégorie A-Mod. alors on a un isomorphisme fonctoriel :

$$\left(\varinjlim_{i \in I} M_i \right)^{\sim} \cong \varinjlim_{i \in I} \tilde{M}_i$$

<u>Démonstration</u> Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A on a un isomorphisme fonctoriel $M[S(\mathfrak{a})^{-1}] \cong \varinjlim_{i \in I} M_i[S(\mathfrak{a})^{-1}]$ (la localisation préserve les limites inductives)
où $M = \varinjlim_i M_i$. Comme le foncteur de faisceau associé est adjoint à gauche, il préserve les limite inductive aussi.

<u>Théorème</u> 3.1 Soient A un anneau. $\mathcal{F}$ un $\tilde{A}$-module. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(1) $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent

(2) Il existe une famille $(g_i)_{i=1}^m$ d'éléments dans A telle que $A = \sum_{i=1}^m g_i A$ et que $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \cong \mathcal{F}(D(g_i))^{\sim}$ pour tout i.

(3) Pour tout $f \in A$. les deux conditions suivantes sont satisfaite
  (i) Si $t \in \mathcal{F}(\operatorname{Spec} A)$ est telle que $t|_{D(f)} = 0$. alors il existe un entier $n \geq 1$ tel que $f^n t = 0$
  (ii) Pour tout $s \in \mathcal{F}(D(f))$. il existe un entier $n \geq 1$ et $t \in \mathcal{F}(\operatorname{Spec} A)$ tels que $f^n s = t|_{D(f)}$

(4) Il existe un A-module M tel que $\mathcal{F} \cong \tilde{M}$.

<u>Démonstration</u>

"1) ⟹ 2)" Pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. il existe $f \in A$ tel que $D(f) \ni \mathfrak{p}$

~~tel~~ et ~~que le~~ un diagramme

$$(\tilde{A}|_{D(f)})^{\oplus I_f} \xrightarrow{\alpha_f} (\tilde{A}|_{D(f)})^{\oplus J_f} \longrightarrow \mathcal{F}|_{D(f)} \longrightarrow 0$$

~~soit~~ exacte. L'homomorphisme α_f induit un homomorphisme de $A[f^{-1}]$ modules : $A_f^{\oplus I_f} \longrightarrow A_f^{\oplus J_f}$. On désigne par M son conoyau.

Le lemme précédent montre que $\mathcal{F}|_{D(f)} \cong \tilde{M} \cong \mathcal{F}(D(f))^{\sim}$.

Par la quasi-compacité de $\operatorname{Spec} A$, on obtient (2)

"(2) ⟹ (3)" Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ on a

$$(t|_{D(g_i)})|_{D(fg_i)} = t|_{D(fg_i)} = (t|_{D(f)})|_{D(fg_i)} = 0$$

Comme $\mathcal{F}|_{D(g_i)} = \mathcal{F}(D(g_i))^{\sim}$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $(f^N/1)(t|_{D(g_i)}) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. Donc on a $f^N t|_{D(g_i)} = 0$ pour tout i

$\Rightarrow f^N t = 0$

Soit $s \in \mathcal{F}(D(f))$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ et $s_i \in \mathcal{F}(D(g_i))$ $(i = 1, \dots, m)$ tels que $f^n s|_{D(fg_i)} = s_i|_{D(fg_i)}$ $\forall i \in \{1, \dots, m\}$.

Soit $s_{ij} = s_i|_{D(g_i g_j)}$. Ainsi $s_{ij}|_{D(fg_ig_j)} = s_{ji}|_{D(fg_ig_j)}$.

Il existe alors $M > 0$ tel que $(f^M/1)(s_{ij} - s_{ji}) = 0$ pour tous i et j. Pour tout i, soit $t_i = (f^M/1)(s_i)$. Alors il existe $t \in \mathcal{F}(\operatorname{Spec} A)$ tel que $t|_{D(g_i)} = t_i$ pour tout i

On obtient donc $t|_{D(f)} = f^{n+M} s$.

"(3) ⟹ (4)" Soit $M = \mathcal{F}(\operatorname{Spec} A)$. Pour $s \in \mathcal{F}(D(f))$ il existe $t \in M$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $f^n s = t|_{D(f)}$. On construit un homomorphisme $\Phi_f : \mathcal{F}(D(f)) \longrightarrow M[f^{-1}]$ tel que $\Phi_f(s) = t/f^n$. Il faut vérifier que cette définition ne dépend pas du choix de t et n. On suppose que $f^m s = t'|_{D(f)}$, alors $(f^n t' - f^m t)|_{D(f)} = 0$. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $f^N(f^n t' - f^m t) = 0$. Donc $t/f^n = t'/f^m$ dans $M[f^{-1}]$

La condition (3). i) montre que Φ_f est injectif. En outre $t/f^n = \Phi_f\left(\frac{1}{f^n} t|_{D(f)}\right)$

Donc Φ_f est surjectif. Enfin, si $f^n s|_{D(f)} = t|_{D(f)}$, alors pour tout $g \in A$

$(fg)^n (s|_{D(fg)}) = g^n t|_{D(fg)}$. Donc Φ_f commute avec la restriction.

Cela montre que $\mathcal{F}$ et $\tilde{M}$ sont isomorphes

(4) ⇒ (1) Il existe des ensembles I. J. et un diagramme exact

$$A^{\oplus I} \longrightarrow A^{\oplus J} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Par passage à $\varinjlim$ (où on utilise le lemme) on obtient une suite exacte

$$\tilde{A}^{\oplus I} \longrightarrow \tilde{A}^{\oplus J} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

__Corollaire__ Soit A un anneau. Le foncteur de $\tilde{\tilde{A}}$-Mod vers $\tilde{A}$-Mod qui envoie tout A-module M en $\tilde{M}$, est exact et ~~fidèle~~ pleinement fidèle.

__Démonstration__ (Ce foncteur admet un adjoint à droite $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(\operatorname{Spec} A, \mathcal{F})$)

Il suffit de montrer que, si $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M$ est injectif, alors $\tilde{\alpha} : \tilde{M}' \longrightarrow \tilde{M}$ est un monomorphisme.

⁂

__Proposition__ Soient A un anneau. P un A-module. Les conditions suivantes sont équivalentes.

1) P est un A-module projectif. (autrement dit. le foncteur $\operatorname{Hom}_A(P, -)$ est exact)

2) Si $f : M \longrightarrow N$ est un homomorphisme surjectif de A-module. Tout homomorphisme $g : P \longrightarrow N$ se relève en $\tilde{g} : P \rightarrow M$ tel que $f\tilde{g} = g$

3) P est une composante directe d'un A-module libre.

__Démonstration__ 1) ⇒ 2). Si P est projectif. alors la suite

$$\operatorname{Hom}_A(P, M) \xrightarrow{f\circ -} \operatorname{Hom}_A(P, N) \longrightarrow 0$$

est exacte

2) $\Rightarrow$ 3) Soit Q un A-module libre et $f : Q \to P$ un homomorphisme surjectif. Soit K le noyau de f. On a une suite exacte

$$0 \to K \to Q \to P \to 0$$

Le relèvement de $Id_P : P \to P$ à $P \to Q$ donne un scindement de cette suite exacte $\to$ $Q \simeq K \oplus P$

3) $\Rightarrow$ 1) Il est facile de montrer qu'un A-module libre est projectif. En outre, toute composante directe d'un A-module projectif est encore projectif. Donc toute composante directe d'un A-module libre est projectif.

<u>Corollaire</u> Tout A-module projectif est plat.

<u>Proposition</u> Soit A un anneau local et M un A-module plat et de présentation finie, alors M est un A-module libre.

<u>Démonstration</u> Soient k le corps résiduel de A.

Comme M est de présentation finie, il existe $f : A^n \to M$ surjective tel que ~~$N := \operatorname{Ker} f$ soit de type fini~~. $f_k : k^n \to M \otimes_A k$ soit un isomorphisme. Le noyau de f est un A-module de type fini.

<u>Lemme</u> Soit $\varphi : F \to M$ un homomorphisme. Si F est de type fini et si M est de présentation finie, alors $\operatorname{Ker} \varphi$ est de type fini.

<u>Preuve</u> Soit $g : A^n \to F$ surjectif. Soit

$$A^p \xrightarrow{a} A^m \xrightarrow{h} M \to 0 \quad \text{une suite exacte.}$$

Il existe $\psi : A^n \to A^m$ tel que $h\psi = \varphi g$ (Comme A^n est projectif)

Il existe $u : A^m \to F$ tel que $h = \varphi u$. On considère

$$\begin{tikzcd}
 & A^n \arrow[r, "{(Id,-\psi)}"] \arrow[d, "\eta"'] & A^{n+m} \arrow[r, "\psi+Id"] \arrow[d, "g+u"] & A^m \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & F \arrow[r, "\varphi"'] & M &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ Coker η est l'image de Ker h

où les lignes sont exactes, η est induit par $\varphi \circ (g+u) \circ (Id, -\psi) = 0$.

Comme M est plat, la suite

$$0 \to N \otimes_A k \to k^n \to M \otimes_A k \to 0$$

est exacte. Cela montre que $N \otimes_A k = 0$. Comme N est de type fini, on obtient $N = 0$.

<u>Théorème</u> Soient A un anneau et M un A-module de présentation finie. Alors $\tilde{M}$ est un $\tilde{A}$-module localement libre si et seulement si M est un A-module projectif. ($\Leftrightarrow$ M est un A-module plat)

<u>Démonstration</u> "$\Leftarrow$" est facile

"$\Rightarrow$" Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. $M_\mathfrak{p}$ est alors un $A_\mathfrak{p}$-module libre de rang fini. Si $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ est une suite exacte de A-modules, alors

$$0 \to N'_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p} \to N''_\mathfrak{p} \to 0$$ est une suite exacte de $A_\mathfrak{p}$-modules.

$\rightarrow$

$$0 \to \mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, N'_\mathfrak{p}) \to \mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, N_\mathfrak{p}) \to \mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, N''_\mathfrak{p}) \to 0$$

$$\wr\!\mathrm{S}$$

$$0 \to (\mathrm{Hom}_A(M, N'))_\mathfrak{p} \to \mathrm{Hom}_A(M, N)_\mathfrak{p} \to \mathrm{Hom}_A(M, N'')_\mathfrak{p} \to 0$$

car M est un A-module de présentation finie.

$$\Rightarrow \quad 0 \to \mathrm{Hom}_A(M, N') \to \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(M, N'') \to 0$$

est exacte. $\Rightarrow$ M est un A-module projectif.