CHAPITRE V Compléments sur la théorie des schémas

§1 Géométrie relative

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie où les produits fibré existent

Soit X un objet dans $\mathcal{C}$.

On désigne par $\mathcal{C}_{/X}$ la catégorie dont

① les objets sont des morphismes vers X

② Si $Y \xrightarrow{f} X$ et $Z \xrightarrow{g} X$ sont des objets de $\mathcal{C}_{/X}$, alors

$$\mathcal{C}_{/X}(f, g) = \{ h : Y \to X \mid gh = f \}$$

Si $F : \mathcal{C}^\circ_{/X} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$ est un foncteur, on définit $\widetilde{F} : \mathcal{C}^\circ \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$ comme

$$\widetilde{F}(Y) = \coprod_{f \in \mathcal{C}(Y,X)} F(f)$$

fonceur de $\mathcal{C}^\circ$ vers $\underline{\mathrm{Ens}}$

On a un morphisme de foncteurs $\widetilde{F} \xrightarrow{\pi} h_X$

$\forall\ Y \in \mathcal{C}$, $\pi_Y : \widetilde{F}(Y) \longrightarrow \mathcal{C}(Y, X)$ envoie les éléments de $F(f)$ vers f

Réciproquement, étant donné un foncteur de $\mathcal{C}^\circ \xrightarrow{\widetilde{G}} \underline{\mathrm{Ens}}$ avec un morphisme de foncteurs $\widetilde{G} \xrightarrow{\pi} h_X$, on peut construire un foncteur $G : \mathcal{C}^\circ_{/X} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$ tel que, $\forall\ f : Y \to X$

$$G(f) = \pi_Y^{-1}(\{f\}).$$

Il y a donc une équivalence de catégories

$$\widehat{\mathcal{C}_{/X}} := \underline{\mathrm{Fon}}(\mathcal{C}^{op}_{/X}, \underline{\mathrm{Ens}}) \cong (\widehat{\mathcal{C}})_{/h_X} = \left(\underline{\mathrm{Fon}}(\mathcal{C}^\circ, \underline{\mathrm{Ens}})\right)_{/h_X}.$$

Soit K une prétopologie de Grothendieck sur $\mathcal{C}$. On définit une prétopologie sur $\mathcal{C}_{/X}$ comme la suite :

Pour tout morphisme $f : Y \to X$, on définit $K_{/X}(f)$ comme $K(Y)$.

alors $K_{/X}$ est une prétopologie sur $\mathcal{C}_{/X}$

<u>Théorème 1.1</u> Soit $F : \mathcal{C}^{\circ}_{/X} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$ un faisceau par rapport à la prétopologie $K_{/X}$. Si tout foncteur représentable de $\mathcal{C}^{\circ}$ est un faisceau par rapport à la prétopologie K, alors $\tilde{F}$ est un faisceau par rapport à la prétopologie K (il suffit que h_X est un faisceau)

<u>Démonstration</u> Soit $(Y_i \xrightarrow{g_i} Y)_{i\in I}$ une famille de morphismes dans $K(Y)$.
Montrons que le diagramme

$$\tilde{F}(Y) \longrightarrow \prod_{i\in I} \tilde{F}(Y_i) \overset{\mathcal{E}_1}{\underset{\mathcal{E}_2}{\rightrightarrows}} \prod_{(j,k)\in I^2} \tilde{F}(Y_j \times_Y Y_k)$$

est exact. Soit $(\xi_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \tilde{F}(Y_i)$ tel que $\mathcal{E}_1((\xi_i)_{i\in I}) = \mathcal{E}_2((\xi_i)_{i\in I})$
Comme le foncteur h_X est un faisceau, le diagramme

$$\mathcal{C}(Y,X) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{C}(Y_i, X) \overset{\mathcal{E}_1}{\underset{\mathcal{E}_2}{\rightrightarrows}} \prod_{(j,k)\in I^2} \mathcal{C}(Y_j \times_Y Y_k, X)$$

Pour tout $i\in I$, soit $\varphi_i = \pi_{Y_i}(\xi_i)$. La relation $\mathcal{E}_1((\xi_i)_{i\in I}) = \mathcal{E}_2((\xi_i)_{i\in I})$ montre que $\mathcal{E}_1((\varphi_i)_{i\in I}) = \mathcal{E}_2((\varphi_i)_{i\in I})$.
Donc il existe un unique $\varphi : Y \to X$ tel que $\varphi_i = \varphi g_i \quad \forall i\in I$.
Comme F est un faisceau, la suite

$$F(\varphi) \longrightarrow \prod_{i\in I} F(\varphi_i) \overset{\mathcal{E}_1}{\underset{\mathcal{E}_2}{\rightrightarrows}} \prod_{(j,k)\in I^2} F\left(\begin{array}{c} Y_j \times_Y Y_k \\ \downarrow \\ X \end{array}\right)$$

est exacte, il existe alors un unique $\xi \in F(\varphi) \subset \tilde{F}(Y)$ tel que $\xi_{|Y_i} = \xi_i$ pour tout $i\in I$ ✡

§2 Espace projectif.

Dans ce paragraphe, on fixe un anneau k. On désigne par $\underline{\mathrm{An}}_k$ la catégorie des k-algèbres. Rappelons que $\underline{\mathrm{An}}^{\circ}_k$ s'identifie à $(\underline{\mathrm{An}}^{\circ})_{/k}$.
topologie de Zariski-Grothendick sur $\underline{\mathrm{An}}^{\circ}_k$ par §1
Soit E un k-module. On définit un foncteur

$$\mathbb{P}(E) : \underline{\mathrm{An}}_k \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$$

$$P(E)(A) = \{\text{quotient projectif de rang un de } E\otimes_k A\}$$
$$\shortparallel$$
fibré inversible quotient de $\tilde{E}$ sur Spec A.

Proposition 2.1 $\mathbb{P}(E)$ est un faisceau pour la topologie de Zariski-Grothendieck

Preuve : Recollement de faisceaux.

Si s est un élément de E, on définit le sous-foncteur U_s de $\mathbb{P}(E)$ comme la suite

$$U_s(A) = \left\{ E \otimes_k A \xrightarrow{\pi} L \;\middle|\; A \xrightarrow{s} E \otimes_k A \xrightarrow{\pi} L \text{ est un isomorphisme} \right\} /\sim$$

Proposition 2.2 Les U_s forment un recouvrement ouvert de $\mathbb{P}(E)$ par des foncteurs représentables :

Démonstration

① représentabilité de U_s

On désigne par $S(E)$ l'algèbre symétrique de E

$$S(E) = \bigoplus_{n \geq 0} S^n(E)$$

Soit $S(E)_{(s)}$ la sous-k-algèbre de la localisation $S(E)_s$ engendrée par les éléments de la forme t/s où $t \in E$.

Montrons que U_s est représentable par $S(E)_s$:

Rappelons que $S(E)$ représente le foncteur

$$A \longmapsto \mathrm{Hom}_k(E, A) \cong \mathrm{Hom}_A(E \otimes_k A, A).$$

$A \xrightarrow{s} E \otimes_k A \xrightarrow{\pi} A$ est un isomorphisme $\Leftrightarrow \pi(s) \in A^\times$

$\Leftrightarrow \pi : E \otimes_k A \to A$ induit un homomorphisme de k-algèbres de $S(E)_{(s)} \longrightarrow A$.

② U_s est un sous-foncteur ouvert de $\mathbb{P}(E)$.

Soit $\varphi : h_A \longrightarrow \mathbb{P}(E)$ un morphisme de foncteurs qui correspond à un quotient $E \otimes_k A \xrightarrow{\varphi} L$

alors $U_s \times_{\mathbb{P}(E)} h_A$ est le foncteur définit par l'ouvert

$$\left\{ x \in \mathrm{Spec}(A) \;\middle|\; (\varphi(x))(s(x)) \neq 0 \right\}.$$

③ $\mathbb{P}(E)$ est recouvert par les sous-foncteurs $U_s(s\in E)$.

Si K est un corps qui est une k-algèbre, alors

$$\mathbb{P}(E)(K) = \{ E\otimes_k K \twoheadrightarrow K \}$$

Si $(s_i)_{i\in I}$ est un système de générateur de E, alors $\mathbb{P}(E)$ est recouvert par $(U_{s_i})_{i\in I}$

Pour chaque quotient $E\otimes_k K \xrightarrow{\pi} K$, on peut toujours trouver $s\in E$ tel que $\pi(s\otimes 1)\neq 0$. $\rightsquigarrow$ $\pi\in U_s(K)$

Remarque Si E est de type fini, alors $\mathbb{P}(E)$ est quasi-compact. ※

Par le recollement de faisceaux on obtient le résultat suivant.

Proposition 2.2 Soient k un anneau et E un k-module. Le foncteur de $\underline{\mathrm{Sch}}_k^{\circ}$ vers $\underline{\mathrm{Ens}}$ qui envoie tout k-schéma $\Phi : X \to \mathrm{Spec}\, k$ en quotient localement libre de rang un de $\Phi^*(E)$, est représentable par le k-schéma $\mathbb{P}(E)$

catégorie des k-schémas

considéré comme un ela

Définition de f^* (envoyer un faisceau quasi-cohérent en un faisceau quasi-cohérent)!

Remarque Soit $\pi : \mathbb{P}(E) \longrightarrow \mathrm{Spec}\, k$ la projection canonique. L'ensemble $\underline{\mathrm{Sch}}_k(\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(E))$ est en bijection canonique avec $\{$quotient inversible de $\pi^*(E)\}$. On désigne par $\mathcal{O}_E(1)$ le quotient inversible de $\pi^*(E)$ correspondant à $1_{\mathbb{P}(E)}$. appelé le faisceau inversible universel de $\mathbb{P}(E)$.

Proposition 2.3 Soient k un anneau et E un k-module de type fini. On a

$$\Gamma(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_E(1)) \cong E \quad (\text{i.e. 后面再讲})$$

Démonstration. Le quotient $\pi^*(E) \longrightarrow \mathcal{O}_E(1)$ induit par adjonction

$$E \longrightarrow \pi_*(\mathcal{O}_E(1)) = \Gamma(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_E(1)).$$

Si $s\in E$, alors l'image de s dans $\Gamma(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_E(1))$ ne s'annule pas sur U_s (qui est non-vide). Cette application est donc injective. Montrons la surjectivité. Soit $(s_i)_{i\in I}$ un système fini de générateurs de E. Comme $\mathcal{O}_E(1)$ est un faisceau, on a un diagramme exact.

$$\Gamma(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_E(1)) \longrightarrow \prod_{i\in I} S(E)_{(s_i)} \overset{g_1}{\underset{g_2}{\rightrightarrows}} \prod_{(j,k)\in I^2} S(E)_{(s_j s_k)}$$

§3 Condition topologique

- Soit X un espace topologique. On dit que X est irréductible s'il n'est pas la réunion de deux sous-ensembles fermés $\neq X$.
- Si $F : \underline{An} \to \underline{Ens}$ est un foncteur, on dit que F est irréductible si $|Rg(F)|$ l'est.

Rappel. $Rg : Fon(\underline{An}, \underline{Ens}) \longrightarrow \underline{ELA}$ est adjoint à gauche du foncteur

$$X \longmapsto (F_X : A \mapsto \underline{ELA}(\mathrm{Spec}\, A, X)).$$

- Conditions relatives de foncteurs.

Soit $f : F \to G$ un morphisme dans $\underline{Fon}(\underline{An}, \underline{Ens})$. On dit que f est injectif, surjectif, bijectif, ouvert, fermé, dominant, quasi-compact si $Rg(f) : |Rg(F)| \longrightarrow |Rg(G)|$ l'est.

Si $\Delta_f : F \longrightarrow F \underset{G}{\times} F$ est quasi-compact, on dit que f est quasi-séparé.

Rappel : Soient X et Y deux espaces topologiques, et $\varphi : X \to Y$ une application continue.

- On dit que φ est $\begin{matrix}\text{ouvert}\\ \text{fermé}\end{matrix}$ si φ envoie tout sous-ensemble $\begin{matrix}\text{ouvert}\\ \text{fermé}\end{matrix}$ de X en un sous-ensemble $\begin{matrix}\text{ouvert}\\ \text{fermé}\end{matrix}$ de Y
- On dit que φ est dominant si $\varphi(X)$ est dense dans Y
- On dit que φ est quasi-compact si l'image réciproque de tout sous-ensemble ouvert quasi-compact $\subset Y$ par φ est un sous-ensemble quasi-compact de X.

§4 Version universelle d'une propriété.

Soit $\mathbb{P}$ une propriété de morphisme de foncteurs.

On dit qu'une autre propriété $\mathbb{Q}$ de morphisme de préfaisceaux est la version universelle de $\mathbb{P}$ si, pour tout morphisme de foncteurs $f : F \to G$ on a

$$\mathbb{Q}(f) \iff (\forall \varphi : H \to G,\ \mathbb{P}(f_H))$$

où $f_H : F \underset{G}{\times} H \longrightarrow H$ est la deuxième projection.

Si $\mathbb{P} \Leftrightarrow \mathbb{Q}$, on dit que $\mathbb{P}$ est une propriété universelle.

Exemple : immersion ouverte est une propriété universelle.

§5 Morphismes affines

Soit $f : F \to G$ un morphisme de foncteurs. Si, pour tout anneau A et tout morphisme $h_A \to G$, le produit fibré $h_A \times_G F$ est un foncteur représentable, on dit que f est un morphisme affine.

Proposition 5.1 Soit $\varphi : F \to G$ un morphisme affine. Si G est un schéma, alors il en est de même de F.

Démonstration Soit A un anneau. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille dans A telle que $\sum_{i\in I} f_i A = A$. Montrons que le diagramme

$$F(A) \longrightarrow \prod_{i\in I} F(A_{f_i}) \underset{q_2}{\overset{q_1}{\rightrightarrows}} \prod_{(j,k)\in I^2} F(A_{f_j f_k})$$

Soit $\underline{x} = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} F(A_{f_i})$ tel que $q_1(\underline{x}) = q_2(\underline{x})$

Pour tout $i \in I$, soit y_i l'image de x_i par $\varphi_{A_{f_i}}$ $(y_i \in G(A_{f_i}))$

Soit b l'unique élément dans $G(A)$ tel que $b|_{A_{f_i}} = y_i \quad \forall i$

On considère b comme un morphisme de foncteurs $h_A \to G$.

Le foncteur $F' = h_A \times_G F$ est représentable car φ est un morphisme affine.

Donc le diagramme

$$F'(A) \longrightarrow \prod_{i\in I} F'(A_{f_i}) \underset{q_2}{\overset{q_1}{\rightrightarrows}} \prod_{(j,k)\in I^2} F'(A_{f_j f_k})$$

est exact. Pour tout $i \in I$, soit $\eta_i : A \to A_{f_i}$ le morphisme naturel

Soit $x_i' = (\eta_i, x_i) \in F'(A_{f_i})$ et $\underline{x}' = (x_i')_{i\in I}$

On a $q_1(\underline{x}') = q_2(\underline{x}')$. Donc il existe un unique élément $\alpha \in F'(A)$ tel que $\alpha|_{A_{f_i}} = (\eta_i, x_i)$ pour tout i

α est nécessairement de la forme (I_A, a) où $a \in F(A)$

$\Rightarrow$ a est l'unique élément dans $F(A)$ tel que $a|_{A_{f_i}} = x_i \quad \forall i \in I$.

Enfin si $(\psi_j : h_{B_j} \to G)_{j\in J}$ est un recouvrement de G par des immersions ouvertes, comme φ est affine, pour tout $j \in J$, $h_{B_j} \times_G F$ est représentable, et $h_{B_j} \times_G F \longrightarrow F$ est une immersion ouverte.

Proposition 5.2 Tout morphisme affine de schémas est quasi-compact

Démonstration Soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme affine de schéma.
Si $U \subset Y$ est un ouvert affine, alors $\varphi^{-1}(U)$ est affine, donc quasi-compact ⁂

Remarque "morphisme affine" est une propriété universelle stable par composition.

Soit $f : F \to G$ un morphisme de foncteurs. Si f est un morphisme affine et si, pour tout anneau A et tout morphisme $h_A \to G$, le morphisme de foncteurs représentable $h_A \underset{G}{\times} F \xrightarrow{pr_1} h_A$ correspond à un anneau quotient de A, on dit que f est une immersion fermée. C'est une propriété universelle stable par composition.

Proposition 5.3 Si A est un anneau et I est un idéal de A, alors le morphisme de foncteurs $h_{A/I} \to h_A$ induit par la projection $A \to A/I$ est une immersion fermée.

Démonstration Si B est une A-algèbre et si $h_B \to h_A$ est le morphisme de foncteurs correspondant, alors

$$h_B \underset{h_A}{\times} h_{A/I} \cong h_{B/IB}.$$

⁂

Proposition 5.4 Soient F et G deux foncteurs dans $\underline{\mathrm{Fon}}(\underline{\mathrm{An}}, \underline{\mathrm{Ens}})$, et $\varphi : F \to G$ une immersion fermée, Alors φ est une morphisme injectif et fermé. Donc $Rg(\varphi)$ définit un homeomorphisme entre $|Rg(F)|$ et l'image de $Rg(\varphi)$, qui est une partie fermée de $Rg(G)$

Démonstration Soit K un corps. Soit $\rho \in G(K)$, vu comme $h_K \xrightarrow{\rho} G$.
Comme φ est une immersion fermée, $h_K \underset{G}{\times} F$ est défini par un anneau quotient de K. Si L/K est une extension et $\sigma \in F(L)$ tel que $\varphi_L(\sigma) =$ l'image de ρ dans $G(L)$, alors il existe un unique $\alpha : h_L \to h_K \underset{G}{\times} F$ tel que $pr_2\, \alpha = \sigma$ et $pr_1 \alpha$ correspond à l'inclusion $K \to L$. Cela montre que $h_K \underset{G}{\times} F \cong h_K$ et $pr_2 : \mathrm{Spec}\, K \underset{G}{\times} F \to F$ définit un point $x \in |Rg(F)|$ tel que

$$\forall\ \sigma \in F(L), \quad \varphi_L(\sigma) = \text{l'image de } \rho \text{ dan } G(L) \implies [\sigma] = x.$$

$\implies \varphi$ est injectif. La deuxième partie est laissée comme un exercice.

<u>Corollaire</u> Soient F. G. H trois foncteurs. Si $\varphi : G \to H$ est une immersion fermée et $\psi : F \to G$ est une immersion ouverte, alors il existe une imersion ouvert $u : U \to H$ et une immersion fermée $v : F \to U$ telles que $uv = \varphi\psi$

$F \hookrightarrow G \hookrightarrow H$

<u>Démonstration</u> L'image de $Rg(F)$ dans $Rg(H)$ par $Rg(\varphi\psi)$ est une partie ouvert dans un sous-ensemble fermé de H (qui est $Im(Rg(\varphi))$).

Donc il existe $V \subset Rg(H)$ ouvert. tel que $Im(Rg(\varphi\psi)) = V \cap Im(Rg(\varphi))$

Il suffit alors de prendre $U = H_V$. ~~e~~ $\underbrace{u : U \to H}_{\text{le morphisme d'inclusion}}$ est une immersion ouverte.

On a un morphisme $v : F \to U$ tel que $uv = \varphi\psi$. Enfin

Comme $F \cong G \times_H U$. $v : F \to U$ est une immersion fermée. ⁂

On appelle immersion la composition d'une immersion ouverte et une immersion fermée. C'est une propriété universelle stable par composition

On dit que $\varphi : F \to G$ est séparé si $\Delta_\varphi : F \to F \times_G F$ est une immersion fermée.

<u>Proposition 5.5</u> C'est une propriété stable par composition.

<u>Démonstration</u> Soient $\varphi : F \to G$ et $\psi : G \to H$ des morphismes. le diagramme suivant est un produit fibré

$$\begin{tikzcd} F \times_G F \arrow[r, "j"] \arrow[d] & F \times_H F \arrow[d, "\varphi \times \varphi"] \\ G \arrow[r, "\Delta_\psi"'] & G \times_H G \end{tikzcd}$$

Δ_ψ est une immersion fermée $\Rightarrow$ j l'est aussi

$\Rightarrow$ $\Delta_{\psi\varphi} = j\,\Delta_\psi$ est une immersion fermée. ⁂

La même preuve marche pour "quasi-séparé"

Proposition 5.6 La propriété "morphisme séparé" est universelle

Démonstration Soit $f : F \longrightarrow H$ et $g : G \longrightarrow H$ des morphismes de foncteurs

Soit $f_G : F \times_H G \to G$ la deuxième projection, alors

$$\Delta_{f_G} : F \times_H G \longrightarrow (F \times_H G) \times_G (F \times_H G) \cong F \times_H G \times_H F \cong (F \times_H F) \times_H G$$

s'identifie à $\Delta_f \times 1_G$. Si Δ_f est une immersion fermée, il en est de même de $\Delta_f \times 1_G$.

$\diamond$

Le même argument marche pour quasi-séparé

Remarque : Séparé $\Rightarrow$ quasi-séparé

Tout morphisme affine est séparé