Soit $\varphi : F \to G$ un morphisme dans $\mathrm{Fon}(\mathrm{An}, \mathrm{Ens})$.

On dit que φ est un morphisme séparé si $\Delta_\varphi : F \to F \times_G F$ est une immersion fermée.

Proposition C'est une propriété stable par composition

Démonstration Soient $\varphi : F \to G$ et $\psi : G \to H$ des morphismes. Le diagramme suivant est un produit fibré

$$\begin{array}{ccc} F \times_G F & \xrightarrow{j} & F \times_H F \\ \downarrow & & \downarrow \varphi\times\varphi \\ G & \xrightarrow[\Delta_\psi]{} & G \times_H G \end{array}$$

Δ_ψ est une immersion fermée $\Rightarrow$ j est une immersion fermée

$\Rightarrow$ $\Delta_{\psi\varphi} = j \Delta_\psi$ est une immersion fermée.

Proposition C'est une propriété universelle.

Démonstration Soient $f : F \to H$ et $g : G \to H$ des morphismes dans $\mathrm{Fon}(\mathrm{An}, \mathrm{Ens})$. Soit $f_G : F \times_H G \to G$ la deuxième projection. alors

$$\Delta_{f_G} : F \times_H G \longrightarrow (F \times_H G) \times_G (F \times_H G) \cong F \times_H G \times_H F \cong (F \times_H F) \times_H G$$

s'identifie à $\Delta_f \times 1_G$. Si Δ_f est une immersion fermée, il en est de même de $\Delta_f \times 1_G$.

✲

§ 8 Conditions de finitude.

Soient A un anneau et B une A-algèbre. S'il existe un homomorphisme surjectif $A[T_1, \cdots, T_n] \to B$, on dit que B est A-algèbre de type fini. S'il existe un tel homomorphisme surjectif dont le noyau est un idéal de type fini, on dit que B est une A-algèbre de présentation finie.

Définition 8.1 Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. Si, pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert affine U de x et un voisinage ouvert affine V de $f(x)$ tels que $f(U) \subset V$ et que l'homomorphisme $A(V) \to A(U)$ induit par f

définisse une structure de $A(V)$-algèbre de type fini / de présentation finies sur $A(U)$, on dit que f est un morphisme localement de type fini / de présentation finie, si de plus f est quasi-compact / quasi-compact et quasi-séparé, on dit que f est de type fini / de présentation finie.

Remarque : Ce sont des propriétés de morphismes de schémas universelles et stables par composition.

Définition Soit X un schéma. Si X admet un recouvrement par des ouverts affines d'anneaux noethérien, on dit que X est un schéma localement noethérien. Si de plus X est quasi-compact, on dit que X est un schéma noethérien.

Remarque ① Soit X un schéma localement noethérien. Pour tout ouvert affine U de X, $A(U)$ est un anneau noethérien.

Définition Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas. On dit que f est propre si f est séparé, de type fini et universellement fermé.

Proposition Soit k un anneau. Si E est un k-module de type fini, alors le morphisme canonique $\pi : \mathbb{P}(E) \to \operatorname{Spec} k$ est propre.

Démonstration Pour tout élément homogène f de l'anneau $S(E)$, de degré n
on désigne par U_f le sous-foncteur ouvert de $\mathbb{P}(E)$
qui envoie $A \in \underline{\mathrm{An}}_k$ en

$$\left\{ E \twoheadrightarrow L \;\middle|\; A \xrightarrow{f} S^n E \longrightarrow L^{\otimes n} \text{ est un isomorphisme} \right\} / \sim$$

Ce foncteur est représentable par $S(E)_{(f)}$, l'anneau des éléments homogène de degré 0 dans la localisation $S(E)_f$.

On a $U_f \cap U_g := U_f \times_{\mathbb{P}(E)} U_g = U_{fg}$

et $U_{fg} \hookrightarrow U_f \times_{\operatorname{Spec} k} U_g$ est une immersion fermée.

$S(E)_{(f)} \otimes_k S(E)_{(g)} \longrightarrow S(E)_{(fg)}$ est surjectif.

Pour montrer que π est un morphisme universellement fermé, on introduit deux extensions : (3)

① $\mathrm{Proj}(S_\bullet)$

Soit $S_\bullet := \bigoplus_{n\geq 0} S_n$ une k-algèbre graduée, engendrée par S_1.

On définit le foncteur $\mathrm{Proj}(S_\bullet) : \underline{\mathrm{An}}_k \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$

$\mathrm{Proj}(S_\bullet)(A) := \left\{ S_1 \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} L \text{ quotient projective de rang } 1 \;\middle|\; \begin{array}{l}\varphi \text{ se prolonge en} \\ \varphi^n : \mathrm{Sym}^n(S_1) \longrightarrow L^{\otimes n}\end{array} \right\}$

$\mathrm{Proj}(S_\bullet) \hookrightarrow \mathbb{P}(S_1)$ est une immersion fermée.

Réciproquement, tout sous-schéma fermé de $\mathbb{P}(E)$ se réalise comme le spectre projectif d'une algèbre graduée quotiente de $S(E)$.

②

Si Y est un schéma et E est un $\mathcal{O}_Y$-module quasi-cohérent, alors le foncteur $\mathrm{Sch}^{\circ}_{/Y} \to \underline{\mathrm{Ens}}$

$$(\varphi : X \to Y) \longmapsto \{\text{quotient inversible de rang } 1 \text{ de } \varphi^*(E)\}$$

est représentable par un Y-schéma $\mathbb{P}(E)$.

En outre, pour tout ouvert affine U de Y d'anneau A, on a

$$U \times_Y \mathbb{P}(E) \cong \mathbb{P}(E(U))$$

En utilisant ②, on est ramené à démontrer que $\pi : \mathbb{P}(E) \to \mathrm{Spec}\, k$ est un morphisme fermé. Soit $Z = \mathrm{Proj}(S_\bullet)$ un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}(E)$.

On a $\mathrm{Spec}\, k \setminus \pi(Z) = \bigcup_{n\geq 1} \left\{ x \in \mathrm{Spec}\, k \;\middle|\; S_n \otimes_k \kappa(x) = 0 \right\}$. est un ouvert.

CHAPITRE VI Variétés arithmétiques

Dans ce chapitre, on fixe une courbe arithmétique $S = (K, \mathfrak{M}_K, \Phi_K)$.

§ 1 Variétés arithmétique et polarisation arithmétique

<u>Définition</u> 1.1 On appelle variété arithmétique projective sur S tout sous-schéma fermé X d'un espace projectif $\mathbb{P}(E)$, où E est un espace vectoriel de rang fini sur K.

La restriction de $\mathcal{O}_E(1)$ à X est un faisceau inversible sur X, que l'on note comme $\mathcal{O}_X(1)$

Si un $\mathcal{O}_X$-module inversible L peut être construit de cette manière, on dit que L est très ample.

Métrique adélique

schéma projectif sur $\operatorname{Spec} k$.

Soit X un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}(E)$, où E est un espace vectoriel de rang fini sur K. Pour toute place $v \in M_K$, soit X_v^{an} l'espace analytique de Berkovich associé à $X_{\mathbb{C}_v} := X \times_{\operatorname{Spec} K} \operatorname{Spec} \mathbb{C}_v$.

Soit en outre $j_v : X_v^{an} \longrightarrow X_{\mathbb{C}_v}$ l'application continue que l'on a construit plus haut.

On appelle <u>structure adélique</u> sur $\mathcal{O}_X(1)$ la donnée d'une famille $(h_v)_{v \in M_K}$, où h_v est une métrique continue sur $\mathcal{O}_X(1)_{\mathbb{C}_v}$ relativement à j_v. On demande en plus que

1. Chaque h_v est invariante par l'action du groupe de Galois $\operatorname{Gal}(\mathbb{C}_v/K_v)$
2. Il existe une structure de fibré vectoriel adélique sur E tel que, pour toute sauf un nombre fini de places v, la métrique sur $\mathcal{O}_X(1)_{\mathbb{C}_v}$ provient de la restriction de la métrique de Fubini-Study sur $\mathcal{O}_E(1)_{\mathbb{C}_v}$.

On désigne par $\overline{\mathcal{O}_X(1)}$ la donnée $(\mathcal{O}_X(1), (h_v)_{v \in M_K})$.

Si $\overline{L} = (L, (h_{L,v})_{v \in M_K})$ est un $\mathcal{O}_X$-module inversible muni d'une famille de métriques continues (où $h_{L,v}$ est une métrique continue sur $L_{\mathbb{C}_v}$ relativement à j_v), on désigne par $\overline{L}^\vee$ la donnée $(L^\vee, (h^\vee_{L,v})_{v \in M_K})$, où $h^\vee_{L,v}$ désigne la métrique duale associée à $h_{L,v}$

Si $\underset{(L, (h_{L,v})_{v \in M_K})}{\overline{L}}$ et $\overline{L}'$ $= (L', (h_{L',v})_{v \in M_K})$ deux $\mathcal{O}_X$-modules inversibles munis des métriques continues on désigne par $\overline{L} \otimes \overline{L}'$ le $\mathcal{O}_X$-module $L \otimes L'$ muni des métriques $(h_{L,v} \otimes h_{L',v})_{v \in M_K}$.

<u>Définition</u> On appelle <u>fibré inversible adélique</u> toute donnée d'un $\mathcal{O}_X$-module inversible L muni d'une famille de métriques continues qui peut être identifié à $\overline{\mathcal{O}_E(1)}_{|X} \otimes \overline{\mathcal{O}_F(1)}_{|X}^\vee$ où $\overline{\mathcal{O}_E(1)}_{|X}$ et $\overline{\mathcal{O}_F(1)}_{|X}$ sont respectivement des

restrictions de faisceaux inversibles universelles munis des structures adéliques correspondant à deux immersions fermées $X \hookrightarrow \mathbb{P}(E)$ et $X \hookrightarrow \mathbb{P}(F)$, E et F étant deux espaces vectoriels de rang fini sur K.

$\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$

<u>Extension de scalaire</u> Soit K' une extension finie de K.

$S' = (K', M_{K'}, \oplus_{K'})$ comme dans le cours.

Si X est un schéma projectif sur $\operatorname{Spec} K$ et si $X' = X \times_{\operatorname{Spec} K} \operatorname{Spec} K'$, alors X' est une variété arithmétique sur S'.

De plus, si $v \in M_K$ et si $w \in M_{K'}$, $w|v$, on a
$$X_v^{an} = X_w'^{,an}$$
$$X_{\mathbb{C}_v} = X_{\mathbb{C}_w}$$

Donc tout fibré inversible adélique $\overline{L}$ sur X définit naturellement une structure de fibré inversible adélique sur $p^*(L)$, où $p : X' \longrightarrow X$ est la projection. On désigne par $p^*(\overline{L})$ ou $\overline{L} \otimes_K K'$ le fibré inversible adélique sur X' obtenu de cette manière.

§2 Hauteur Pour simplifier, on suppose $\operatorname{char}(K) = 0$

Soient X une variété arithmétique projective et $\overline{L} = (L, (h_v)_{v\in M_K})$ un fibré inversible adélique sur X. On définit une fonction $h_{\overline{L}}$ sur $X(K)$:

$\forall\ x \in X(K)$, $L(x)$ est un K-espace vectoriel de rang 1.

et $\overline{L}(x) = \left(L(x), (h_v(x))_{v\in M_K} \right)$ est un fibré inversible adélique sur $\operatorname{Spec} K$.

On définit $h_{\overline{L}}(x) := \widehat{\deg}(\overline{L}(x))$.

Plus généralement, si K'/K est une extension finie, et $p : X \times_{\operatorname{Spec} K'} \operatorname{Spec} K \to X$ est la première projection, on définit

$$h_{\overline{L}} : X(K') = X'(K') \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{comme}$$

$$h_{\overline{L}}(x) = \frac{\widehat{\deg}\left(p^*(\overline{L})(x)\right)}{[K':K]}$$

<u>Proposition</u> Les fonctions $h_{\overline{L}} : X(K') \longrightarrow \mathbb{R}$ $([K':K] < +\infty)$ induisent une fonction réelle sur l'ensemble des points fermés de X.

Autrement dit, pour tout point fermé $x \in X$, la valeur de $h_{\overline{L}}(x)$ ne dépend pas du choix du corps de définition de x.

Démonstration Si K''/K' est une extension finie. $p' : X_{K''} \to X$ la projection. Alors $\forall\, x \in X(K')$ on a

$$p'^*(\overline{L})(x) \cong p^*(\overline{L})(x) \otimes_{K'} K''$$

donc $\widehat{\deg}(p'^*(\overline{L})(x)) = \widehat{\deg}(p^*(\overline{L}))\cdot [K'':K']$. ☆

Calcul via une section.

Soient x un point fermé de X, et s une section de L sur un voisinage ouvert de x, $s(x) \neq 0$. Alors on a

$$h_{\overline{L}}(x) = \sum_{v \in M_K} \sum_{\substack{w \in M_{K(x)} \\ w|v}} -\frac{n_w}{[K(x):K]} \ln \|s\|_v(w(x))$$

considéré comme le plongement de $K(x)$ dans $\mathbb{C}_v$

$$= -\sum_{v \in M_K} n_v \sum_{\sigma \in Gal(K(x)/K)} \frac{1}{[K(x):K]} \ln \|s\|_v(\sigma(x)).$$

Additivité Soient X une variété arithmétique projective, et $\overline{L}$ et $\overline{L}'$ deux fibrés inversibles adéliques sur X. On a $h_{\overline{L}\otimes\overline{L}'} = h_{\overline{L}} + h_{\overline{L}'}$ comme fonctions sur $X(\overline{K})$.

§3 Fonction continue comme fibré inversible adélique.

Soient X une variété arithmétique projective sur S, et $v \in M_K$.

Si f est une fonction continue sur X_v^{an}, invariante par $Gal(\mathbb{C}_v/K_v)$, on définit un fibré inversible adélique comme la suite $\overline{\mathcal{O}_v(f)}$

① Le $\mathcal{O}_X$-module inversible sous-jacent à $\overline{\mathcal{O}_v(f)}$ est $\mathcal{O}_X$

② Si $v' \in M_K$ est différente de v.

$\|\mathbb{1}\|_{v'} = 1$ sur $X_{v'}^{an}$ où $\mathbb{1}$ est la section globale d'unité de $\mathcal{O}_X$

③ $\|\mathbb{1}\|_v(x) = e^{-f(x)}$ sur X_v^{an}

Si $x \in X$ est un point fermé, on a

$$h_{\overline{\mathcal{O}_v(f)}}(x) = n_v \sum_{\sigma \in Gal(K(x)/K)} \frac{1}{[K(x):K]} f(\sigma(x))$$

qui est une moyenne de la fonction f sur l'orbite de Galois de la fonction f.
En particulier, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$h_{\overline{\mathcal{O}_v(\lambda)}}$ est une fonction constante sur $X(\overline{K})$ qui prend valeur $n_v\lambda$.

§4 Métrique associée à un modèle.

__Lemme 4.1__ Soient A un anneau de valuation, η le point générique de $\operatorname{Spec} A$, et K le corps des fractions de A. Si $f: X \to S$ est un morphisme propre de schémas et si $\varphi: \operatorname{Spec} A \to S$ est un morphisme de schémas, alors tout S-morphisme $\psi: \operatorname{Spec} K \to X$ se relève de façon unique en un S-morphisme de $\operatorname{Spec} A$ vers X

séparé et universellement fermé.

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "\exists \Psi"] & S \\ \operatorname{Spec} K \arrow[u, "\eta"] \arrow[r, "\psi"'] & X \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

__Démonstration__

Rappel : A est un anneau de valuation de corps des fractions K
$\Leftrightarrow$ A est un élément maximal parmi les sous-anneaux locaux de K dont l'anneau des fractions $=K$ pour la relation de dominance

Si (B, m) et (B', m') sont des sous-anneaux locaux de K, $\operatorname{Frac}(B) = \operatorname{Frac}(B') = K$. on dit que (B', m') domine (B, m) si $B \subset B'$ et si $mB' \subset m'$.

On commence par vérifier l'existence de relèvement de ψ. Pour cela, il suffit de supposer que f est universellement fermé. On note $Y = \operatorname{Spec} A$ et $f_Y: X \times_S Y \to Y$ la deuxième projection. ψ et η induit ainsi un Y-morphisme de $\operatorname{Spec} K$ vers $X \times_S Y$. On se ramène donc au cas où $S = \operatorname{Spec} A$ et $\varphi: \operatorname{Spec} A \to S$ est le morphisme d'identité.

Soit x l'image de ψ et $Z = \overline{\{x\}}$, vu comme un sous-schéma fermé intègre de X. Comme ψ est un S-morphisme, on obtient que η est l'image de x par f. Comme f est un morphisme fermé, on obtient que la restriction de f à Z est un morphisme surjectif. Il existe alors y dans Z tel que $f(y)$ soit le point fermé de S.

L'anneau local $\mathcal{O}_{Z,f(y)}$ domine alors A. Donc $A = \mathcal{O}_{Z,f(y)}$.

Il suffit donc de prendre $\Psi : \operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{Z,f(y)} \to Z \to X$.

Pour la partie d'unicité, on applique la partie d'existence à l'immersion fermé $\Delta_f : X \to X \times_S X$. Si Ψ_1 et Ψ_2 sont deux relèvements de ψ, alors ils définit un morphisme de $\operatorname{Spec} A$ vers $X \times_S X$. Le S-morphisme $\psi : \operatorname{Spec} K \to X$ devient alors un $X \times_S X$-morphisme

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} K \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\eta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d, "\Delta_f"] \\ \operatorname{Spec} A \arrow[r, "(\Psi_1, \Psi_2)_S"'] & X \times_S X \end{tikzcd}$$

$(\Psi_1, \Psi_2)_S \circ \eta = \Delta_f \circ \psi$

il existe alors un relèvement de $(\Psi_1, \Psi_2)_S \Rightarrow \Psi_1 = \Psi_2$.

$\#$

Soit k un corps muni d'une valeur absolue $|\cdot|$ non-archimédienne.

Soit k° l'anneau de valuation de k : $k^\circ = \{a \in k \mid |a| \leq 1\}$.

C'est un anneau de valuation avec $\operatorname{Frac}(k^\circ) = k$.

Soit $X \xrightarrow{\pi} \operatorname{Spec} k$ un morphisme projectif et L un $\mathcal{O}_X$-module inversible.

On appelle modèle de (X, L) tout morphisme projectif et plat $\theta : \mathcal{X} \to \operatorname{Spec} k^\circ$ et un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-module inversible $\mathcal{L}$ tels que $X = \mathcal{X} \times_{\operatorname{Spec} k^\circ} \operatorname{Spec} k$ et que $L = pr_1^*(\mathcal{L})$ où $pr_1 : X = \mathcal{X} \times_{\operatorname{Spec} k^\circ} \operatorname{Spec} k$ est la première projection.

Si K/k est une extension valuée et si K° est l'anneau de valuation de K, alors $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ induit un modèle de $(X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} K, L \otimes_k K)$ qui est $\mathcal{X} \times_{\operatorname{Spec} k^\circ} \operatorname{Spec} K^\circ$ et $\mathcal{L} \otimes_{k^\circ} K^\circ$.

Si $x \in X(K)$ est un point de X à valeurs dans K, on définit une norme $\|\cdot\|(x)$ sur $L(x)$ dont la boule unité fermé est $P_x^* \mathcal{L}$ où

$p_x : \operatorname{Spec} K^\circ \longrightarrow \mathscr{X}$ est le k°-morphisme qui relève x (critère valuatif de propreté).

$\|\cdot\|(\cdot)$ ainsi construites définissent une métrique continue sur L relativement à $j : X^{an} \longrightarrow X$.

__Proposition__ : Soit s un élément dans $\Gamma(X, L)$. Alors s se prolonge en une section dans $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{L})$ si et seulement si $\|s\|(x) \leq 1$ pour tout $x \in X^{an}$

__Démonstration__. "$\Rightarrow$" provient de la définition.

§5 Applications au problème d'équidistribution

K corps de nombres

$M_K = \{$ places de $K \}$.

$\Theta_K = (n_v)_{v \in M_K}$ où $n_v = [K_v : \mathbb{Q}_v]$

Soient X un schéma projectif et intègre sur $\operatorname{Spec} K$, et $\overline{L}$ un fibré inversible adélique sur X. $\quad d = \dim X$

Pour tout entier $n \geq 1$, soit $\overline{E}_n = \pi_*(\overline{L}^{\otimes n})$, où $\pi : X \to \operatorname{Spec} K$ est le morphisme structurel.

Minimum essentiel.

$$\hat{\mu}_{ess}(\overline{L}) = \inf \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid V_{\overline{L}}(X, \lambda) \text{ est Zariski dense dans } X \}$$

où $V_{\overline{L}}(X, \lambda) = \{ x \in X(\overline{K}) \mid h_{\overline{L}}(x) \leq \lambda \}$

Rappelons la filtration par minima sur $\overline{E}_n$.

$$\mathcal{F}^t E_n = \operatorname{Vect}_K \{ 0 \neq s \in E_n \mid \widehat{\deg}(\overline{K}_s) \geq t \}$$

Volume arithmétique

$$\widehat{\operatorname{vol}}(\overline{L}) := \limsup_{n \to \infty} \frac{\log \# \{ s \in E_n \mid \forall v \in M_K, \|s\|_{v,\sup} \leq 1 \}}{n^{d+1}/(d+1)!}$$

On dit que $\overline{L}$ est gros si $\widehat{\operatorname{vol}}(\overline{L}) > 0$.

__Fait__ : Si $\overline{L}$ est gros, alors $\operatorname{vol}(L) := \limsup_{n \to +\infty} \frac{\operatorname{rg}_K(E_n)}{n^d/d!} > 0$

c'est-à-dire que L est gros.

Propriétés de la fonction volume :

① homogénéité : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ n\geq 1$, $\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L}^{\otimes n}) = n^{d+1}\,\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L})$

② log-concavité : si $\overline{L}$ et $\overline{M}$ sont deux fibrés inversibles adéliques. on a $\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L}\otimes\overline{M})^{\frac{1}{d+1}} \geq \widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L})^{\frac{1}{d+1}} + \widehat{\mathrm{vol}}(\overline{M})^{\frac{1}{d+1}}$

③ Différentiabilité Si $\overline{L}$ et $\overline{M}$ sont deux fibrés inversibles adéliques, où $\overline{L}$ est gros, alors

$$\partial^+_{\overline{M}}\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L}) := \lim_{n\to+\infty}\frac{\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L}^{\otimes n}\otimes\overline{M}) - \widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L}^{\otimes n})}{n^d}$$

Existe dans $\mathbb{R}$. De plus, l'application $\overline{M}\longmapsto \partial^+_{\overline{M}}\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L})$ est additive ($\overline{L}$ est fixé).

des résultat similaire existe pour vol $\rightsquigarrow \partial^+_{M}\mathrm{vol}(L)$.

On obtient ainsi un fonctionnel positif pour tout $v\in M_K$

$$f\in C^0(X_v^{an})^{\mathrm{Gal}(\mathbb{C}_v/K_v)} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\Psi_{\overline{L},v} : f \longmapsto \partial^+_{\mathcal{O}_v(f)}\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L}).$$

Soit $\underline{x}=(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de points algébriques dans $X(\overline{K})$. On dit que $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite générique si toute sous-suite de $(x_n)_{n\geq 0}$ est Zariski dense dans X. Dans la suite, on fixe une suite générique $\underline{x}=(x_n)_{n\geq 0}$, et définit une application $\Psi_{\underline{x}} : \widehat{\mathrm{Pic}}(X) \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$

$$\overline{L} \longmapsto \liminf_{n\to\infty} h_{\overline{L}}(x_n).$$

Propriétés

- Comme $h_{\overline{L}}$ est additive en $\overline{L}$, $\Psi_{\underline{x}}$ est sur-additive : $\Psi_{\underline{x}}(\overline{L}+\overline{M}) \geq \Psi_{\underline{x}}(\overline{L})+\Psi_{\underline{x}}(\overline{M})$
- $\Psi_{\underline{x}}(\overline{L}) \geq \hat{\mu}_{ess}(\overline{L})$ par définition.

Théorème S'il existe $\overline{L}\in\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ gros tel que $\lim\limits_{n\to\infty} h_{\overline{L}}(x_n) = \dfrac{\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L})}{(d+1)\,\mathrm{vol}(L)}$, alors pour tout $\overline{M}\in\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ on a

$$\Psi_{\underline{x}}(\overline{M}) = \lim_{n\to\infty} h_{\overline{M}}(x_n) = \frac{\partial^+_{\overline{M}}\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L})}{(d+1)\,\mathrm{vol}(L)} - \frac{\partial^+_{M}\mathrm{vol}(L)}{(d+1)\,\mathrm{vol}(L)^2}\cdot\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L})$$

Démonstration

Si $\overline{M}$ est gros, alors on a $\Psi_{\underline{x}}(\overline{M}) \geq \hat{\mu}_{ess}(\overline{M}) \geq \dfrac{\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{M})}{(d+1)\,\mathrm{vol}(M)}$

En effet, soit $\lambda_{max}(\overline{E}_n) = \sup\{t\in\mathbb{R} \mid \mathcal{F}^t E_n \neq \{0\}\}$, alors le deuxième théorème de Minkowski montre que

avec $\overline{E}_n = \pi_*(\overline{M}^{\otimes n})$

$$\left|\int_0^{\lambda_{max}(E_n)} \mathrm{rg}(\mathcal{F}^t E_n)\,dt - \log\#\{s\in E_n \mid \forall v,\ \|s\|_{v,sup}\leq 1\}\right| = O(\overbrace{\mathrm{rg}(E_n)}^{r_n}\log \mathrm{rg} E_n)$$

Si on divise les deux côtés par $n \cdot rg(E_n)$ et passe à la limsup quand $n \to +\infty$, on obtient

$$\widehat{vol}(\overline{M}) = \limsup_{n\to\infty} (d+1)\, vol(M) \cdot \int_0^{\lambda_{max}(\overline{E}_n)} \frac{rg(\mathcal{F}^t E_n)}{n \cdot rg(E_n)}\, dt$$

$$\leq (d+1)\, vol(M) \limsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_{max}(\overline{E}_n)}{n}$$

De plus, si $s \in E_n$ est tel que $\widehat{deg}(\overline{K \cdot s}) = \lambda_{max}(\overline{E}_n)$, on a, pour tout $x \in X(\overline{K}$ avec $s(x) \neq 0$

$$n\, h_{\overline{M}}(x) = - \sum_{v \in M_K} [K_v : \mathbb{Q}_v] \sum_{\sigma \in Gal(K(x)/K)} \frac{1}{[K(x):K]} \log \|s\|_v(\sigma(x))$$

$$\geq - \sum_{v \in M_K} [K_v : \mathbb{Q}_v] \sum_{\sigma \in Gal(K(x)/K)} \frac{1}{[K(x):K]} \log \|s\|_{v,sup} = \lambda_{max}(\overline{E}_n)$$

$$\Rightarrow \hat{\mu}_{ess}(\overline{M}) \geq \frac{\lambda_{max}(\overline{E}_n)}{n} \quad \text{pour tout } n.$$

$$\Rightarrow \hat{\mu}_{ess}(\overline{M}) \geq \frac{\widehat{vol}(\overline{M})}{(d+1)\, vol(M)}.$$

<u>Lemme</u> Soient G un groupe commutatif et H un sous-groupe de G.
Si $\varphi : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une application sur-additive et non-identiquement $+\infty$ et si $\psi : H \to \mathbb{R}$ est un morphisme de groupes tel que $\varphi \geq \psi$, alors $\varphi = \psi$

<u>Preuve</u> Quitte à remplacer φ par $\varphi - \psi$ et ψ par 0 on peut supposer que $\psi = 0$
On raisonne par absurd
Soit $x \in H$ tel que $\varphi(x) > 0$
alors $\varphi(0) \geq \varphi(x) + \varphi(-x) > 0$.
Il existe $y \in H$ tel que $\varphi(y) < +\infty \Rightarrow \varphi(y) = \varphi(y+0) \geq \varphi(y) + \varphi(0) > \varphi(y)$. absurd

On applique le lemme à $\varphi(\overline{M}) = \partial^+_{\overline{M}} \mathcal{I}_{\underline{x}}(\overline{L})$
et $\psi(\overline{M}) = \partial^+_{\overline{M}} \frac{\widehat{vol}}{(d+1) vol}(\overline{L})$

pour obtenir le résultat.
(La condition $\lim_{n\to\infty} h_{\overline{L}}(x_n) = \frac{\widehat{vol}(\overline{L})}{(d+1)\, vol(L)}$ est utilisée pour montrer que $\varphi \geq \psi$)