Université Joseph Fourier
L2 MAT233
2013-2014

Contrôle de connaissance
du 09 octobre 2013

Les documents sont autorisés. Cependant, tout appareil électronique est interdit. Les trois parties de l'épreuve sont indépendantes.

Première partie

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme $f(x, y) = \max(x - y, 0)$.

1. Montrer que f est une fonction continue.

2. Montrer que, pour tous $P, h \in \mathbb{R}^2$, la limite

$$\partial_h^+ f(P) := \lim_{t \in]0,+\infty[,\ t \to 0} \frac{f(P + th) - f(P)}{t}$$

existe dans $\mathbb{R}$. Déterminer cette limite.

3. Déterminer l'ensemble U des point $P \in \mathbb{R}^2$ où la fonction f est différentiable.

4. Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Deuxième partie

On considère la fonction f définie sur le domaine $D = [0, 1] \times [0, 1]$ comme

$$f(x, y) = (1 - x)(1 - y)(x + y - 1).$$

5. Montrer que f est une fonction conitnue sur D.

6. Montrer que la fonction f atteint son maximum sur D en un point de D°.

7. Montrer que la fonction f est différentiable sur l'intérieur de D. Déterminer sa différentielle.

8. Déterminer tous les points critiques de laréstriction de f à D°.

9. Trouver le maximum global de la fonction f.

10. Application : on admet que l'aire d'un triangle de côtés a, b, c est déterminé par la formule de Héron

$$A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)},$$

où $p = (a + b + c)/2$ est le demi-périmètre du triangle. Déterminer l'aire maximale d'un triangle de périmètre 2.

Troisième partie

Soit f une application de $\mathbb{R}^d$ vers $\mathbb{R}$, où $d \geqslant 1$ est un entier. Pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}^d$, on dit que la fonction f est *uniformément continue* sur A si

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\substack{(x,y) \in A^2 \\ \|x - y\|_{\sup} < \delta}} |f(x) - f(y)| = 0.$$

11. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$. Montrer que, si la fonction f est uniformément continue sur A, alors sa restriction à A est une fonction continue.

12. On suppose que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$. Montrer que, si A est un sous-ensemble borné et fermé de $\mathbb{R}^d$, alors la fonction f est uniformément continue sur A. On peut utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass.

13. On suppose que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose de plus que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que

$$|f(P) - \ell| < \varepsilon \text{ quel que soit } P \in \mathbb{R}^d \text{ vérifiant } \|P\|_{\sup} > M.$$

Montrer que la fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$.