Université Joseph Fourier
L2 MAT233
2013-2014

Contrôle de connaissance
du 06 novembre 2013

Les documents sont autorisés. Cependant, tout appareil électronique est interdit. Les trois parties de l'épreuve sont indépendantes.

Première partie

On désigne par I l'application d'intégration usuelle sur $\mathbb{R}$. Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$ (i.e. $\mathbb{1}_{]a,b]}f$ est intégrable pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$). Si a et b sont deux nombres réels, $a \leqslant b$, on définit

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := I(\mathbb{1}_{]a,b]}f), \qquad \int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t := -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite

$$\lim_{h\to 0} \int_a^{a+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On peut utiliser le théorème de convergence dominée.

2. On fixe dans la suite un nombre réel a et on définit une fonction F sur $\mathbb{R}$ comme

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que la fonction F est continue.

3. Montrer que, si la fonction f est continue, alors la fonction F est différentiable, et on a $F' = f$.

Deuxième partie

Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme $\phi(x) = \exp(-x^2)$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme $f(x, y) := \exp(-x^2 - y^2)$.

4. Montrer que ϕ est une fonction continue et bornée.

5. Montrer que ϕ est un élément dans $L^1(\mathbb{R})$.

6. En déduire que f est un élément dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ et que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \Big(\int_{\mathbb{R}} \phi(t)\,\mathrm{d}t\Big)^2.$$

7. Soit $J = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\}$. Montrer que $\mathbb{1}_J$ est une fonction négligeable.

8. Soit U le complémentaire de J dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que U est un ouvert dans $\mathbb{R}^2$.

9. Montrer que $\mathbb{1}_U f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ et

$$\int_U f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

10. Montrer que l'application $H :]0, +\infty[\, \times\,]0, 2\pi[\to U$ qui envoie (r, θ) en $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ est une bijection différentiable. Déterminer la matrice jacobienne de H. **TSVP**

11. En utilisant la formule

$$\int_U f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{]0,+\infty[\times]0,2\pi[} (f \circ H)(r,\theta) \cdot |\mathrm{d\acute{e}t}\, J_H(r,\theta)|\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

déterminer la valeur de $\displaystyle\int_U f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

12. Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \phi(t)\,\mathrm{d}t$.

13. Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2-t}\,\mathrm{d}t$.

Troisième partie

Soit $d \geqslant 1$ un entier. On désigne par $C_c(\mathbb{R}^d)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues à support compact définies sur $\mathbb{R}^d$. Le but de cette partie est de démontrer que toute forme linéaire positive sur $C_c(\mathbb{R}^d)$ définit nécessairement une application d'intégration.

14. Montrer que, si $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, alors il existe un point $P \in \mathbb{R}^d$ tel que la fonction f atteinde son maximum en P.

15. Montrer que, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fonctions dans $C_c(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers 0, alors la suite $(\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

16. Soit $I : C_c(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que $I(f) \geqslant 0$ pour toute fonction positive $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$. Montrer que, pour toute suite décroissante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $C_c(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers 0, on a

$$\lim_{n\to+\infty} I(f_n) = 0.$$