Université Joseph Fourier
L2 MAT233
2013-2014

Contrôle de connaissance
du 10 janvier 2014

Les documents sont autorisés. Cependant, tout appareil électronique est interdit. Les trois parties de l'épreuve sont indépendantes.

Première partie

Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé dans $\mathbb{R}$, où $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une application continue qui est de classe C^1 sur $]a, b[$ et telle que $\gamma(a) = \gamma(b)$. On suppose que l'appilcation $\gamma' :]a, b[\to \mathbb{R}^2$ s'étend en une application continue de I vers $\mathbb{R}^2$ que l'on note encore comme γ'. On suppose en outre que $\gamma'(t) \neq (0, 0)$ quel que soit $t \in I$ et que $\gamma'(a) = \gamma'(b)$.

On désigne par $\langle \, , \, \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire

$$\big\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \big\rangle = x_1 x_2 + y_2 y_2.$$

Soit $\|.\|$ la norme sur $\mathbb{R}^2$ définie comme

$$\forall\, v \in \mathbb{R}^2, \quad \|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$$

Pour tout $t \in I$, on note

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

1. Montrer que $\forall\, t \in]a, b[$ on a

$$\kappa(t) = \frac{\|T'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|},$$

où $\kappa(.)$ est la courbure de la courbe paramétrée γ.

2. On suppose dans cette question que $I = [0, 2n\pi]$, où $n \geqslant 1$ est un entier. On suppose en outre que la courbe paramétrée est définie par la formule

$$\gamma(t) = \big(r \cos(t), r \sin(t)\big),$$

où $r > 0$. Déterminer une paramétrisation par longueur $s(.)$ de la courbe paramétrée γ puis calculer l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_I \kappa(t) s'(t) \, \mathrm{d}t.$$

Deuxième partie

Considérons l'équation différentielle

$$x'(t) = Ax(t) \tag{1}$$

où x est une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et A est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer l'espace des solutions de cette équation.

4. Soient a, b deux nombres réels quelconques. Déterminer la solution $x(t)$ de l'équation (1) telle que $x(0) = (a, b)$.

TSVP

Troisième partie

Soit g une fonction réelle continue définie sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$. Le but de cette partie est d'étudier l'ensemble S_g des solutions de l'équation différentielle

$$x''(t) + (g(t)+1)x(t) = 0, \quad t \in I. \tag{$*$}$$

5. En introduisant $y(t) = x'(t)$, transformer l'équation $(*)$ en une équation différentielle d'ordre 1.

6. Montrer que S_g est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$. Énoncer le résultat du cours qui conduit à votre réponse.

7. Vérifier que les fonctions $\sin(t)$ et $\cos(t)$ appartiennent à l'espace S_{g_0}, où g_0 désigne la fonction identiquement nulle sur I. Déterminer l'espace S_{g_0}.

8. Soit $x(.)$ une solution de l'équation $(*)$. Montrer que, pour tout $t \in I$, le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} a\cos(x(t)) + b\sin(x(t)) = 0, \\ a\sin(x(t)) - b\cos(x(t)) = g(t)x(t) \end{cases}$$

en variables (a,b) admet une unique solution que l'on note comme $(a(t),b(t))$. Résoudre ce système d'équations linéaires.

9. Soient $A(.)$ et $B(.)$ des fonctions primitives de $a(.)$ et $b(.)$ respectivement. Montrer qu'il existe deux nombres réels C_1 et C_2 tels que

$$\forall\, t \in I, \quad x(t) - A(t)\cos(t) - B(t)\sin(t) = C_1\cos(t) + C_2\sin(t).$$

10. En déduire que, pour tout $\xi \in I$, il existe deux constantes $C_1(\xi)$ et $C_2(\xi)$ telles que

$$\forall\, t \in I, \quad x(t) = C_1(\xi)\cos(t) + C_2(\xi)\sin(t) + \int_\xi^t g(s)x(s)\sin(x(s)-t)\,\mathrm{d}s.$$