Université Joseph Fourier
MAT233 Fonction de plusieurs variables
2013-2014

Feuille d'exercices 1

Exercice 1 Déterminer les bornes inférieure et supérieure des ensembles suivants.
1) $\mathbb{R}$;
2) $\{x - \lfloor x \rfloor \mid x \in \mathbb{R}\}$;
3) $\{(1 + (-1)^n)\frac{n+1}{n} \mid n \in \mathbb{Z},\, n \geqslant 1\}$;

Exercice 2 Déterminer les limites inférieure et supérieure des suites suivantes.
1) $(n)_{n\in\mathbb{N}}$
2) $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$
3) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = 1 + a_n^{-1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Exercice 3 Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels.
1) On suppose que la suite b_n est bornée. Montrer les inégalités suivantes

$$\limsup_{n\to+\infty}(a_n + b_n) \leqslant \Big(\limsup_{n\to+\infty} a_n\Big) + \Big(\limsup_{n\to+\infty} b_n\Big),$$
$$\liminf_{n\to+\infty}(a_n + b_n) \geqslant \Big(\liminf_{n\to+\infty} a_n\Big) + \Big(\liminf_{n\to+\infty} b_n\Big)$$

2) On suppose que $(b_n)_{n\geqslant n_0}$ converge dans $\mathbb{R}$. Montrer les égalités suivantes.

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \liminf_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$
$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Exercice 4 Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres positifs. On suppose que $a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$ quels que soient n et m.
1) On fixe un entier $n \geqslant 1$. Montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et tout $r \in \{0, \dots, n-1\}$, on a $a_{kn+r} \leqslant ka_n + a_r$.
2) En déduire que
$$\limsup_{m\to\infty} \frac{a_m}{m} \leqslant \frac{a_n}{n}$$
quel que soit $n \geqslant 1$. On peut utiliser le résultat de l'exercice précédent.
3) Montre que la suite $(a_n/n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n}.$$

Exercice 5 On appelle *fonction affine* toute fonction sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto ax+b$, où a et b sont deux constantes réelles. Soit f une fonction continue définie sur un intervalle fermé $[a,b]$ qui est deux fois différentiable sur $]a,b[$. On suppose que $f''(x) \geqslant 0$ quel que soit $x \in]a,b[$

1) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que la fonction f' est croissante sur $]a,b[$.
2) Soit x_0 un point de $]a,b[$. Montrer que $f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ quel que soit $x \in [a,b]$.
3) En déduire qu'il existe une famille $(\varphi_i)_{i\in I}$ de fonctions affines telle que $f(x) = \sup_{i\in I} \varphi_i(x)$ quel que soit $i \in I$
4) Soit φ une fonction affine. Montrer que, pour toute famille $\{x_1,\ldots,x_n\}$ de points dans $[a,b]$ et toute vecteur $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in [0,1]^n$ vérifiant $\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n = 1$, on a
$$\varphi(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n) = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \varphi(x_j).$$
5) En déduire que, pour tout $(x_1,\ldots,x_n) \in [a,b]^n$ et tout vecteur $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in [0,1]^n$ vérifiant $\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n = 1$, on a
$$f(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j f(x_j).$$
6) Application : montrer que, si $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ sont des nombres réels, alors
$$(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2).$$
Indication : sans perte de généralité on peut supposer les b_i non-nuls. On applique alors le résultat de 5) à la fonction $f(x) = x^2$ dans le cas où
$$x_i = a_i/b_i \quad \text{et} \quad \varepsilon_i = b_i^2/(b_1^2+\cdots+b_n^2).$$
7) En déduire que, si $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ sont des nombres réels, alors
$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2} \leqslant \sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2} + \sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}.$$

Exercice 6 Soit U un ouvert non-vide dans $\mathbb{R}$. Pour tout point $x \in U$, soit a_x la borne inférieure de l'ensemble $\{y \in \mathbb{R} : [y,x] \subset U\}$, soit b_x la borne supérieure de l'ensemble $\{y \in \mathbb{R} : [x,y] \subset U\}$.

1) Soit $x \in U$. Montrer que l'intervalle $I_x :=]a_x, b_x[$ est contenu dans U.
2) Soient x et y deux points de U. Montrer que, ou bien $I_x \cap I_y = \varnothing$, ou bien $I_x = I_y$.
3) En déduire que U s'écrit comme la réunion disjointe d'intervalles ouverts.

Exercice 7 Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$. Pour tout point $x \in \mathbb{R}$, on désigne par $d(x,A)$ la borne inférieure de l'ensemble $\{|x-y| : y \in A\}$. Montrer que
$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} : d(x,A) = 0\}.$$