Université Joseph Fourier
MAT233 Fonction de plusieurs variables
2013-2014

Feuille d'exercices 2

Exercice 1 On fixe dans cet exercice un entier $d \geqslant 1$.

1) Montrer que, si f et g sont deux fonctions continues définie sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^d$, alors $f+g$ est aussi une fonction continue.
2) En utilisant la définition, montrer que l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy$ est continue.
3) En déduire que, si f et g sont deux fonctions continues définie sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^d$, alors fg est aussi une fonction continue.

Exercice 2 1) Montrer que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 < x < 1\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leqslant x \leqslant y\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
3) Le sous-ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 < x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ est-il un fermé ? Déterminer l'adhérence de A.
4) Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$. On désigne par Γ_f le sous-ensemble $\{(x, f(x)) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$. Montrer que Γ_f est un fermé si f est une fonction continue.

Exercice 3 Soit $d \geqslant 1$ un entier. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est *convexe* si, pour tous points $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$ et tout $\lambda \in [0,1]$, on a

$$f(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta) \leqslant \lambda f(\xi) + (1-\lambda) f(\eta).$$

Si $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ est une famille de points de $\mathbb{R}^d$, on appelle *combinaison convexe* de $\xi_1, \ldots, \xi_n$ tout point de $\mathbb{R}^d$ qui peut s'écrire sous la forme

$$\lambda_1\xi_1 + \cdots + \lambda_n\xi_n,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des nombres positifs tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.

1) Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^d$. Montrer que la fonction $\|.\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est convexe.

Dans le reste de l'exercice, on fixe une fonction convexe f définie sur $\mathbb{R}^d$. On fixe en outre un point $\xi \in \mathbb{R}^d$.

2) Soit h un élément de $\mathbb{R}^d$. Montrer que l'application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ vers $\mathbb{R}$, qui envoie $t > 0$ en
$$\frac{f(\xi + th) - f(\xi)}{t},$$
est croissante.
3) En déduire que, pour tout élément h de $\mathbb{R}^d$, la limite
$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(\xi + th) - f(\xi)}{t}$$
existe dans $\mathbb{R}$.

4) Soit $\{e_1, \ldots, e_d\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On désigne par A la famille des points de la forme $\xi + \varepsilon_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_d e_d$, où $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$ quel que soit $i \in \{1, \ldots, d\}$. Montrer que tout point dans $B(\xi; 1) := \{\eta \in \mathbb{R}^d \,:\, \|\eta - \xi\|_{\sup} < 1\}$ est une combinaison convexe des points dans A.
5) En déduire que la fonction f est bornée dans $B(\xi; 1)$.
6) En déduire que la fonction f est continue.
7) Montrer que, si la restriction de f à $B(\xi; 1)$ atteint son maximum, alors la fonction f est nécessairement constante sur $B(\xi; 1)$.
8) Soit $\overline{B}(\xi; 1)$ la boule unité fermée $\{\eta \in \mathbb{R}^d \,:\, \|\eta - \xi\|_{\sup} \leqslant 1\}$. Montrer que la restriction de la fonction f à $\overline{B}(\xi; 1)$ atteint son maximum en un point η tel que $\|\eta - \xi\|_{\sup} = 1$.

Exercice 4 Soit f la fonction de deux variables réelles définie par

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2}.$$

1) Déterminer le domaine de définition de f et montrer que c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soit Δ l'ensemble $\{(x, x) \,:\, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y) = \frac{x^2 - xy + y^2}{x - y}.$$

2) Montrer que la fonction g est de classe C^1 et déterminer sa différentielle.
3) Quelle est la relation entre les fonctions f et g ?
4) Soit x un nombre réel non-nul. Montrer que la fonction f ne possède pas de limite en (x, x). On peut par exemple considérer la suite $((x, x - 1/n))_{n \geqslant 1}$ dans $\mathbb{R}^d \setminus \Delta$.

On désigne par $\widetilde{g}$ la fonction sur $\Omega := (\mathbb{R}^2 \setminus \Delta) \cup \{(0, 0)\}$ telle que $\widetilde{g}(x, y) = g(x, y)$ si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ et $\widetilde{g}(0, 0) = 0$.

Pour tout nombre réel $a \neq 1$, soit D_a la droite dans $\mathbb{R}^2$ définie par l'équation $y = ax$. Soit en outre D_∞ la droite définie par l'équation $x = 0$.

5) Montrer que, pour tout $a \in (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \cup \{\infty\}$, la restriction de $\widetilde{g}$ à la droite D_a est continue.
6) Pour $r > 0$ fixé, calculer

$$\limsup_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \left|\widetilde{g}(r \cos \theta, r \sin \theta)\right|.$$

7) En déduire que, pour tout $r > 0$

$$\sup_{\xi \in \Omega,\, \|\xi\|_{\ell^2} < r} |\widetilde{g}(\xi)| = +\infty.$$

8) La fonction $\widetilde{g}$ est-elle continue sur Ω ? Justifier votre réponse.