Université Joseph Fourier
MAT233 Fonction de plusieurs variables
2013-2014

Feuille d'exercices 3

Exercice 1 Soient $d \geqslant 1$ un entier et $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^d$.

1) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|P\| \leqslant C\|P\|_{\sup}$ quel que soit $P \in \mathbb{R}^d$.
2) En déduire que l'application $\|.\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est continue, où on a considéré la métrique sur $\mathbb{R}^d$ induite par la norme $\|.\|_{\sup}$.
3) Soit $S := \{P \in \mathbb{R}^d \mid \|P\|_{\sup} = 1\}$ le cercle unité dans $\mathbb{R}^d$ par rapport à la norme $\|.\|_{\sup}$. Montrer que $\inf_{P \in S} \|P\| > 0$.
4) En déduire qu'il existe $C' > 0$ tel que $\|P\|_{\sup} \leqslant C'\|P\|$ quel que soit $P \in \mathbb{R}^d$.
5) Montrer qu'un sous-ensemble U est un ouvert par rapport à $\|.\|$ si et seulement s'il est un ouvert par rapport à $\|.\|_{\sup}$.

Exercice 2 Soit $\langle\,,\,\rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 1$), défini comme

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i,$$

où $x = (x_1, \ldots, x_d)$ et $y = (y_1, \ldots, y_d)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^d$. Soit S le sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ des points $(x_1, \ldots, x_d)$ tel que

$$x_1^2 + \cdots + x_d^2 = 1.$$

On fixe une matrice carrée *symétrique* A de taille $d \times d$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ et on désigne par $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ l'application qui envoie (x, y) en $\langle x, Ay\rangle$

1) Montrer que l'application f est continue sur $\mathbb{R}^{2d} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.
2) En déduire que l'application $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ qui envoie x en $f(x, x)$ est continue.
3) Montrer que φ est une fonction différentiable et on a
$$D\varphi(x)(y) = 2f(x, y).$$
4) Montrer que S est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^d$.
5) En déduire que la fonction φ atteint son maximum sur S.
6) Soit x un élément de S tel que $\varphi(x) = \sup \varphi(S)$. Montrer que la restriction de $D\varphi(x)$ à l'ensemble
$$x^{\perp} := \{y \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, y\rangle = 0\}$$
est nulle.
7) En déduire que $x^{\perp}$ est invariant sous l'action de A et x est un vecteur propre de la matrice A.

8) Montrer qu'il existe une base $(e_i)_{i=1}^d$ de $\mathbb{R}^d$ qui consisite des vecteurs propres de A et telle que $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ si $i \neq j$.

Exercice 3 On considère la fonction à deux variables réelles suivante

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

définie sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

1) Montrer que la fonction f est différentiable sur U et déterminer ses dérivées partielles par rapport aux deux coordonnées.
2) La fonction f possède-elle une limite en $(0, 0)$? Justifier votre réponse.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} x \ln(x^2 + y^2), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1) Montrer que la fonction f est continue.
2) Montrer que la restriction de la fonction f à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est différentiable. Déterminer sa différentielle.
3) Déterminer l'ensemble des vecteurs $h \in \mathbb{R}^2$ tels que la dérivée partielle $\partial_h f(0, 0)$ soit bien définie.
4) La fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 5 Soit $\varphi :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ l'application telle que $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

1) Montrer que la fonction φ est différentiable et déterminer sa différentielle.
2) Soit f une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Soit $g = f \circ \varphi$. Montrer que

$$\left(\frac{\partial g}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial r} \circ \varphi \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \circ \varphi \right)^2$$

3) Soit F une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Supponsons qu'il existe trois fonctions f, g et h sur $\mathbb{R}$ telles que

$$F(x, y) = f(x) + g(y), \quad F(\varphi(r, \theta)) = h(r).$$

Déterminer la fonction F.

Exercice 6 Le but de cet exercice est de résoudre l'équation différentiellle partielle

$$x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

On désigne par H l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1) Montrer que l'application $\varphi : H \times \mathbb{R} \to H \times \mathbb{R}$ qui envoie (x, y) en (x, xy) est une bijection différentiable. Déterminer la matrice jacobienne de φ.
2) Quitte à effectuer le changement de variables $(u, v) = (x, xy)$, résoudre l'équation sur $H \times \mathbb{R}$.
3) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation sur $\mathbb{R}^2$.