Université Joseph Fourier
MAT233 Fonction de plusieurs variables
2013-2014

Feuille d'exercices 4

Exercice 1 Soit A une matrice de taille $d \times d$ qui est symétrique. Montrer que A est définie positive (resp. négative) si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives (resp. négative).

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ une matrice symétrique. Montrer que A est définie positive (resp. négative) si et seulement si $a + c > 0$ (resp. $a + c < 0$) et $ac - b^2 < 0$.

Exercice 3 Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$.
1) Montrer que $|f|$ est une fonction continue.
2) Montrer que $\max(f, g)$ est une fonction continue.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme $f(x, y) = |x + y|$.
1) Montrer que la fonction f est continue.
2) Déterminer l'ensemble $U \subset \mathbb{R}^2$ des points où f est différentiable.
3) Pour chaque point $P \in U$, déterminer $Df(P)$.

Exercice 5 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie comme

$$f(x, y) = 2(y - x^2)^2 - \frac{1}{7}x^7 - y^2.$$

1) Montrer que la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer sa matrice jacobienne.
2) Montrer que la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer sa matrice hessienne.
3) Montrer que $(-2, 8)$ est un minimum local de la fonction f.
4) Montrer que $(0, 0)$ est un point critique de la fonction f. Cependant il n'est ni un minimum local ni un maximum local de la fonction f.
5) Montrer que, pour tout nombre réel $k \neq 0$, la restriction de la fonction f à la droite $y = kx$ possède $(0, 0)$ comme un minimum local.

Exercice 6 On considère la fonction $f(x, y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x + y)$ définie sur le domaine

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant \pi\}$$

1) Montrer que D est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Déterminer son intérieur $D°$.
2) Montrer que la fonction f est différentiable sur $D°$ et déterminer sa différentielle en chaque point de $D°$.
3) Déterminer $\sup f(D)$ et $\inf f(D)$. Justifier votre réponse.