Université Joseph Fourier
MAT233 Fonction de plusieurs variables
2013-2014

Feuille d'exercices 5

On désigne par Θ l'ensemble des intervalles dans $\mathbb{R}$ de la forme $]a,b]$, où a et b sont des nombres réels. Si $a \geqslant b$, l'intervalle $]a,b]$ est par convention l'ensemble vide. Pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, l'expression $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction sur $\mathbb{R}$ qui envoie $x \in \mathbb{R}$ en 1 si $x \in A$ et en 0 sinon. Soit en outre S l'espace vectoriel engendré par les fonctions sur $\mathbb{R}$ de la forme $\mathbb{1}_A$ avec $A \in \Theta$. Soit $I : S \to \mathbb{R}$ l'application linéaire définie comme

$$I(\lambda_1 \mathbb{1}_{]a_1,b_1]} + \cdots + \lambda_n \mathbb{1}_{]a_n,b_n]}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (b_i - a_i).$$

Exercice 1 1) Montrer que, pour tout couple d'intervalles J_1 et J_2 dans Θ, on a $J_1 \cap J_2 \in \Theta$.

2) En déduire que, si f et g sont deux fonctions dans S, on a $fg \in S$.

3) Montrer que, si f est une fonction dans S, on peut écrire f sous la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{A_i},$$

où $A_1, \ldots, A_n$ sont des intervalles dans Θ qui sont deux-à-deux disjoints.

On désigne par $S^{\uparrow}$ l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ qui peuvent être ércrite comme la limite d'une suite croissante dans S. Soit en outre $S^{\downarrow}$ l'ensemble $\{-f \mid f \in S^{\uparrow}\}$. Rappelons que, dans le cours on a étendu l'application I en $S^{\uparrow} \cup S^{\downarrow}$ et défini un espace vectoriel $\widetilde{S}$ comme l'ensemble des fonctions $h : \Omega \to \mathbb{R}$ qui vérifie

$$\sup_{g \in S^{\downarrow},\, g \leqslant h} I(g) = \inf_{f \in S^{\uparrow},\, f \geqslant h} I(f) \in \mathbb{R}.$$

On a étendu I en une application linéaire de $\widetilde{S}$ vers $\mathbb{R}$. L'application $\|.\|_{L^1} : \widetilde{S} \to [0, +\infty[$ définit une semi-norme sur $\widetilde{S}$. On désigne par $L^1(\mathbb{R})$ la fermeture de S dans $\widetilde{S}$ par rapport à la semi-norme $\|.\|_{L^1}$.

Exercice 2 Soient a et b deux nombres réels, $a \leqslant b$.

1) Montrer que $\mathbb{1}_{[a,b]} \in L^1(\mathbb{R})$. Déterminer $I(\mathbb{1}_{[a,b]})$.
2) Montrer que $\mathbb{1}_{]a,b[} \in L^1(\mathbb{R})$. Déterminer $I(\mathbb{1}_{]a,b[})$.
3) Montrer que $\mathbb{1}_{[a,b[} \in L^1(\mathbb{R})$. Déterminer $I(\mathbb{1}_{[a,b[})$.
4) Soit φ une fonction croissante définie sur $[a,b]$, considérée comme une fonction sur $\mathbb{R}$ prenant valeur 0 en dehors de $[a,b]$. Montrer que φ est dans $L^1(\mathbb{R})$. On peut vérifier que φ est en fait intégrable au sens de Riemann.

Exercice 3 1) Soit A un élément de Θ. Montrer que, pour tout élément $f \in S$, on a $\|\mathbb{1}_A f\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1}$.

2) En déduire que, pour toute fonction $h \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\mathbb{1}_A h \in L^1(\mathbb{R})$.
3) En déduire que, pour toute fonction $f \in S$ et toute fonction $h \in L^1(\mathbb{R})$, on a $fh \in L^1(\mathbb{R})$.
4) Montrer que, si f et h sont deux fonctions dans $L^1(\mathbb{R})$, f est bornée, alors fh est dans $L^1(\mathbb{R})$.
5) En déduire que, si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et si a et b sont deux nombres réels, $a < b$, alors $\mathbb{1}_{]a,b]}f$ est dans $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 4 Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$ (i.e. $\mathbb{1}_{]a,b]}f$ est intégrable pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$). Si a et b sont deux nombres réels, $a \leqslant b$, on définit

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := I(\mathbb{1}_{]a,b]}f), \qquad \int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t := -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite
$$\lim_{h\to 0} \int_a^{a+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
On peut utiliser le théorème de convergence dominée.
2) On fixe dans la suite un nombre réel a et on définit une fonction F sur $\mathbb{R}$ comme
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que la fonction F est continue.
3) Montrer que, si la fonction f est continue, alors la fonction F est différentiable, et on a $F' = f$.
4) Soit b un nombre réel, $b > a$. Soit en outre $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante et positive. Montrer que
$$\varphi(a) \inf_{x\in[a,b]} F(x) \leqslant \int_a^b \varphi(t)f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varphi(a) \sup_{x\in[a,b]} F(x).$$
On peut commencer par le cas où $f \in S$. En déduire qu'il existe $\xi \in [a, b]$ tel que
$$\int_a^b \varphi(t)f(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(a) \int_a^\xi f(t)\,\mathrm{d}t.$$
5) Application : montrer que, pour tout $h > 0$ fixé, on a
$$\lim_{a\to+\infty} \int_a^{a+h} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = 0.$$