Université Joseph Fourier
MAT233 Fonction de plusieurs variables
2013-2014

Feuille d'exercices 6

Exercice 1 Pour tout entier $d \geqslant 1$ et tout $r \geqslant 0$, on désigne par $B_d(r)$ la boule ouverte de rayon r dans $\mathbb{R}^d$ centrée en 0, définie comme

$$B_d(r) := \{(x_1, \ldots, x_d) \,|\, x_1^2 + \cdots + x_d^2 < r^2\}.$$

1) Montrer que $\mathbb{1}_{B_d(r)} \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

2) Pour tout élément $P \in \mathbb{R}^d$, soit $B_d(P, r)$ l'ensemble

$$\{P + Q \,|\, Q \in B_d(r)\}.$$

Montrer que $\mathbb{1}_{B_d(P,r)} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{B_d(P,r)}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{B_d(r)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

3) On désigne par $V_d(r)$ le volume de $B_d(r)$, défini comme

$$V_d(r) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{B_d(r)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que $V_d(r) = r^d V_d(1)$.

4) En utilisant le théorème de Fubini, montrer que

$$V_d(1) = \int_{-1}^{1} V_{d-1}(\sqrt{1-t^2})\,\mathrm{d}t$$

5) En effectuant un changement de variables, montrer que

$$V_d(1) = V_{d-1}(1) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta)^d\,\mathrm{d}\theta.$$

6) Déterminer les valeurs de $V_1(1)$, $V_2(1)$ et $V_3(1)$.

Exercice 2 Soit E la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$E(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & x < 0, \\ 0, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

1) Montrer que, si P est un polynôme, alors on a

$$\lim_{x \to 0} P(1/x)E(x) = 0.$$

2) En déduire que la fonction E est de classe C^∞.
3) Soient $a < b$ deux nombres réels. Montrer que $F(x) = E(a-x)E(x-b)$ ($x \in \mathbb{R}$) est une fonction de classe C^∞ et à support dans $[a,b]$.
4) Montrer que la fonction $H : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie comme

$$H(x_1, \ldots, x_d) = E(x_1^2 + \cdots + x_d^2 - 1)$$

est de classe C^∞ et est à support compact.

Exercice 3 On désigne par $C_c^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui sont de classe C^∞ et à support compact. Le but de cet exercice est de montrer que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$. On fixe une fonction positive $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \chi(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

1) Pour toutes fonctions $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit $\varphi * f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$(\varphi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Montrer que $\varphi * f$ est bien définie et est une fonction de classe C^∞. En outre, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $(\varphi * f)^{(n)} = \varphi^{(n)} * f$.
2) Montrer que, si $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est à support compact, alors $\varphi * f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.
3) Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit $\chi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ définie comme $\chi_n(x) = n\chi(nx)$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_n(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

4) Soit f une fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit $f_n = \chi_n * f$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, autrement dit,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

En déduire que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $C_c(\mathbb{R})$ relativement à la norme $\|.\|_{\sup}$, définie comme $\|f\|_{\sup} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.
5) Soit g une fonction dans $L^1(\mathbb{R})$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit $g_n = \chi_n * g$. Montrer que $g_n \in L^1(\mathbb{R})$ et que

$$\lim_{n\to+\infty} \|g_n - g\|_{L^1} = 0.$$

En déduire que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$ pour la semi-norme $\|.\|_{L^1}$.